MATEMÁTICAS CCSS

EXAMEN OFICIAL REALIZADO EN ESPAÑA EN LA CONVOCATORIA ORDINARIA PCE UNEDASISS 2024

EXAMEN RESUELTO

PARTE TEST

Deben responderse 8 preguntas del total de tipo test. Cada respuesta correcta suma 0,5 puntos. Las respuestas incorrectas penalizan 0,25 puntos. No responder no suma ni resta puntuación.

1. Una matriz A es diagonal si se cumple que:

a) Es cuadrada y los elementos no pertenecientes a la diagonal principal son todos iguales a 0

b) Todos los elementos de la diagonal principal son iguales

c) Todas las anteriores

Solución.

Respuesta: a)

La definición de matriz diagonal exige dos condiciones: ser cuadrada y que $a_{ij} = 0$ para todo $i \neq j$. No se exige nada sobre los elementos de la diagonal principal, que pueden ser distintos entre sí (b) describe una matriz escalar, que es un caso particular). Como b) es falsa como definición general, c) también lo es.

2. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 12 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 6 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, el resultado de hacer $A \times B$ es:

a) La matriz nula de orden 3

b) No es posible hacer $A \times B$

c) Ninguna de las otras

Solución.

Respuesta: a)

Dimensiones: A es 3×2 y B es 2×3. Coinciden columnas de A con filas de B, luego el producto existe y es de orden 3×3. Descartamos b).

$$A \times B = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 12 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 & 0 & 6 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Comprobación de la primera fila: $3(-6) + 6(3) = -18 + 18 = 0$; $3(0) + 6(0) = 0$; $3(6) + 6(-3) = 18 - 18 = 0$.

Segunda fila: $6(-6) + 12(3) = -36 + 36 = 0$; 0; $6(6) + 12(-3) = 36 - 36 = 0$. La tercera fila es nula por serlo la de A.

Truco: las columnas de A son proporcionales ($C_2 = 2C_1$) y las filas de B también ($F_1 = -2F_2$), lo que fuerza la anulación de todos los productos.

3. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, el valor de A^{-1} es:

a) La matriz A no es invertible

b) $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$

c) Ninguna de las otras

Solución.

Respuesta: b)

$|A| = 6 \cdot 1 - (-5)(-1) = 6 - 5 = 1 \neq 0$, luego A es invertible (descartamos a).

Para una matriz 2×2, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$:

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Comprobación: $A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. ✓

4. Dada la inecuación $6x + 26 < 2$. La solución general es:

a) $(-\infty, 4)$

b) $(4, +\infty)$

c) Ninguna de las otras

Solución.

Respuesta: c)

$$6x + 26 < 2 \implies 6x < -24 \implies x < -4 \implies x \in (-\infty, -4)$$

El intervalo obtenido, $(-\infty, -4)$, no coincide con a) ni con b), luego la correcta es c).

Nota: si el enunciado original fuera $6x + 2 < 26$ (la captura presenta espaciado ambiguo), se obtendría $x < 4$, es decir $(-\infty, 4)$, y la respuesta sería a). Con el enunciado tal y como está escrito, la respuesta es c).

5. ¿Cuál es el valor del siguiente límite $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ si $f(x) = -e^{-6x}$?

a) 0

b) $-\infty$

c) Ninguna de las otras

Solución.

Respuesta: b)

Estudiamos el exponente: si $x \to -\infty$, entonces $-6x \to +\infty$. Por tanto:

$$e^{-6x} \to +\infty \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x \to -\infty} \left(-e^{-6x}\right) = -\infty$$

El signo menos delante invierte el infinito. (Si el límite fuera en $x \to +\infty$, entonces $-6x \to -\infty$, $e^{-6x} \to 0$ y el resultado sería 0: esa es la trampa de la opción a).)

6. Dada la función $f(x) = \dfrac{-6x}{\sqrt{x^2+6}}$, el dominio de la función es:

a) $(6, \infty)$

b) $(-6, \infty)$

c) Ninguna de las otras

Solución.

Respuesta: c)

Hay dos restricciones que comprobar:

- **Radicando** ≥ 0: $x^2 + 6 \geq 0$ se cumple $\forall x \in \mathbb{R}$, ya que $x^2 \geq 0$ y por tanto $x^2 + 6 \geq 6 > 0$.
- **Denominador** $\neq 0$: $\sqrt{x^2+6} = 0 \Leftrightarrow x^2 = -6$, que no tiene solución real.

Ninguna restricción excluye ningún valor, luego $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, que no es a) ni b).

7. La función $f(x) = \dfrac{6x^2}{x-3}$ tiene un máximo en el punto

a) $x = 0$

b) $x = 6$

c) Ninguna de las otras

Solución.

Respuesta: a)

Derivamos aplicando la regla del cociente:

$$f'(x) = \frac{12x(x-3) - 6x^2 \cdot 1}{(x-3)^2} = \frac{12x^2 - 36x - 6x^2}{(x-3)^2} = \frac{6x^2 - 36x}{(x-3)^2} = \frac{6x(x-6)}{(x-3)^2}$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 6x(x-6) = 0 \Rightarrow x = 0$ o $x = 6$ (puntos críticos; $x = 3$ es asíntota vertical, no pertenece al dominio).

Como $(x-3)^2 > 0$ siempre, el signo de f' lo marca $6x(x-6)$:

Intervalo	$(-\infty, 0)$	$(0, 3)$	$(3, 6)$	$(6, +\infty)$
Signo de f'	$+$	$-$	$-$	$+$
f	creciente	decreciente	decreciente	creciente

En $x = 0$ pasa de creciente a decreciente $\Rightarrow$ **máximo relativo** en $x = 0$ (con $f(0) = 0$). En $x = 6$ pasa de decreciente a creciente $\Rightarrow$ mínimo relativo. La respuesta es a).

8. Hallar $\displaystyle\int \left(\frac{6x}{x^2} - \frac{6}{x}\right) dx$

a) $6\ln(x^2) - 6\ln|x| + C$

b) $6x \ln|x| + C$

c) Ninguna de las otras

Solución.

Respuesta: c)

Antes de integrar, simplificamos el integrando:

$$\frac{6x}{x^2} - \frac{6}{x} = \frac{6}{x} - \frac{6}{x} = 0$$

Por tanto:

$$\int \left(\frac{6x}{x^2} - \frac{6}{x}\right) dx = \int 0\, dx = C$$

El resultado es una constante, que no coincide con a) ni con b).

Comprobación de que a) es falsa: $6\ln(x^2) - 6\ln|x| = 12\ln|x| - 6\ln|x| = 6\ln|x| \neq C$, ya que $\ln(x^2) = 2\ln|x|$. Esta es la trampa principal de la pregunta.

9. Si en un experimento con siete posibles resultados se sabe que las probabilidades de cada uno son

$$p(R_1) = 0,12; \quad p(R_2) = 0,21; \quad p(R_3) = 0,14; \quad p(R_4) = 0,14; \quad p(R_5) = 0,1;$$

$$p(R_6) = a \quad \text{y} \quad p(R_7) = b$$

Se puede afirmar que

a) $a = 0,3$ y $b = 0,05$

b) $a = 0,15$ y $b = 0,14$

c) $a = -0,2$ y $b = 0,35$

Solución.

Respuesta: b)

Aplicamos los dos axiomas de probabilidad:

1. La suma de todas las probabilidades del espacio muestral debe valer 1.
2. Toda probabilidad debe ser ≥ 0.

Suma de las conocidas: $0,12 + 0,21 + 0,14 + 0,14 + 0,1 = 0,71$. Por tanto:

$$a + b = 1 - 0,71 = 0,29$$

Comprobamos las opciones:

- a) $0,3 + 0,05 = 0,35 \neq 0,29$. **Falsa.**
- b) $0,15 + 0,14 = 0,29$ ✓ y ambas son positivas. **Correcta.**
- c) $-0,2 + 0,35 = 0,15 \neq 0,29$; además $a < 0$ es imposible. **Falsa.**

10. Dados dos sucesos aleatorios tal que $p(A \cap B) = 0,2$; $p(A \cup B) = 0,4$ y $p\left(\frac{A}{B}\right) = 0,8$. Entonces podemos afirmar que:

a) $p(B) = 0,25$

b) $p(B/A) = 0,2$

c) $p(\bar{B}) = 0,6$

Solución.

Respuesta: a)

De la definición de probabilidad condicionada, $p(A/B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)}$, despejamos $p(B)$:

$$p(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A/B)} = \frac{0,2}{0,8} = 0,25$$

La opción a) es correcta. Descartamos las otras dos:

- $p(\bar{B}) = 1 - p(B) = 1 - 0,25 = 0,75 \neq 0,6$. **Falsa c).**
- De $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$: $p(A) = 0,4 - 0,25 + 0,2 = 0,35$. Entonces $p(B/A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)} = \dfrac{0,2}{0,35} = 0,571\ldots \neq 0,2$. **Falsa b).**

11. Si la variable aleatoria Z sigue una distribución $N(0,1)$ podemos afirmar que:

a) $p(Z \leq 1,17) = 0,879$

b) $p(Z \leq 1,17) = 0,121$

c) Ninguna es correcta

Solución.

Respuesta: a)

En la tabla de la $N(0,1)$, buscamos la fila $1,1$ y la columna $0,07$:

$$p(Z \leq 1,17) = 0,8790$$

Razonamiento de control sin tabla: como $1,17 > 0$, necesariamente $p(Z \leq 1,17) > 0,5$, lo que descarta directamente la opción b). De hecho, $0,121 = 1 - 0,879 = p(Z > 1,17) = p(Z \leq -1,17)$.

12. Dada X una variable aleatoria normal $N(\mu, 2)$ se quiere estimar la media muestral, $\bar{x}$, con un error menor de 0,25 y con un nivel de confianza del 95%. ¿Cuál debe ser el tamaño muestral?

a) $n = 246$

b) $n = 105$

c) $n = 174$

Solución.

Respuesta: a)

Datos: $\sigma = 2$; $E < 0,25$; nivel de confianza $1 - \alpha = 0,95 \Rightarrow \alpha/2 = 0,025 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$.

El error máximo admisible en la estimación de la media es:

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{n} \geq \frac{z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{E}$$

$$\sqrt{n} \geq \frac{1,96 \cdot 2}{0,25} = \frac{3,92}{0,25} = 15,68 \quad \Longrightarrow \quad n \geq 15,68^2 = 245,86$$

Como n debe ser un número entero y la desigualdad exige $n \geq 245,86$, redondeamos *siempre al alza*: $n = 246$.

PARTE DESARROLLO

Escoger 2 de los 3 siguientes problemas (3 puntos cada uno).

1. En un instituto dos grupos de alumnos van de excursión y compran camisetas, gorros y bufandas. En la matriz A se indica el número de artículos que ha comprado cada grupo, y en la matriz B se muestran los precios de los artículos en las 3 tiendas que han visitado.

$$A = \begin{pmatrix} 25 & 20 & 15 \\ 20 & 15 & 25 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 10 & 11 & 10 \\ 15 & 14 & 12 \end{pmatrix}$$

Siendo para A:

C_1: Camisetas; C_2: Gorros; C_3: Bufandas; F_1: Grupo 1; F_2: Grupo 2

Siendo para B:

C_1: Tienda 1; C_2: Tienda 2; C_3: Tienda 3; F_1: Camisetas; F_2: Gorros; F_3: Bufandas

a) Multiplica las matrices.

b) ¿Cuál es el coste de los artículos del grupo 1 si compran todos sus artículos en la tienda 2? Indica qué elemento de la matriz nos da esa información. ¿Cuál es el coste de los artículos del grupo 2 si compran todos sus artículos en la tienda 3? Indica qué elemento de la matriz nos da esa información.

c) ¿Cuál sería la tienda más barata si los dos grupos compraran todo en el mismo lugar, y cuánto habría que pagar? ¿Cuál sería la tienda más cara si los dos grupos compraran todo en el mismo lugar y cuanto habría que pagar?

Solución.

a) Producto de matrices

A es 2×3 (grupos $\times$ artículos) y B es 3×3 (artículos $\times$ tiendas). El producto $A \cdot B$ es posible y da una matriz 2×3 cuyo significado es **grupos** $\times$ **tiendas**, es decir, lo que le costaría a cada grupo comprar todo en cada tienda.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 25 & 20 & 15 \\ 20 & 15 & 25 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 10 & 11 & 10 \\ 15 & 14 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 550 & 580 & 555 \\ 625 & 635 & 590 \end{pmatrix}$$

Desarrollo de cada elemento:

$$\begin{aligned} c_{11} &= 25(5) + 20(10) + 15(15) = 125 + 200 + 225 = 550 \\ c_{12} &= 25(6) + 20(11) + 15(14) = 150 + 220 + 210 = 580 \\ c_{13} &= 25(7) + 20(10) + 15(12) = 175 + 200 + 180 = 555 \\ c_{21} &= 20(5) + 15(10) + 25(15) = 100 + 150 + 375 = 625 \\ c_{22} &= 20(6) + 15(11) + 25(14) = 120 + 165 + 350 = 635 \\ c_{23} &= 20(7) + 15(10) + 25(12) = 140 + 150 + 300 = 590 \end{aligned}$$

Interpretación: la fila i indica el grupo y la columna j la tienda; c_{ij} es el gasto total (en euros) del grupo i comprando todos sus artículos en la tienda j.

b) Costes concretos

- Grupo 1 comprando todo en la tienda 2: nos lo da el elemento c_{12} (fila 1 = Grupo 1, columna 2 = Tienda 2), es decir, **580 €**.
- Grupo 2 comprando todo en la tienda 3: nos lo da el elemento c_{23} (fila 2 = Grupo 2, columna 3 = Tienda 3), es decir, **590 €**.

c) Tienda más barata y más cara para ambos grupos

Si los dos grupos compran en la misma tienda, sumamos las dos filas de cada columna:

	Tienda 1	Tienda 2	Tienda 3
Grupo 1	550	580	555
Grupo 2	625	635	590
Total	**1.175**	**1.215**	**1.145**

- **Tienda más barata: la tienda 3**, pagando **1.145 €**.
- **Tienda más cara: la tienda 2**, pagando **1.215 €**.

Observación que suele valorarse: la tienda 3 es la más barata en conjunto aunque *no* sea la más barata para el grupo 1 (a ese grupo le saldría mejor la tienda 1, con 550 €). El resultado global depende de la combinación de artículos de cada grupo.

2. Una compañía tiene las siguientes funciones de ingresos y gastos, en euros, y dónde x es la cantidad de unidades vendidas.

$$I(x) = 6x^4 + 6x^2 - 20x - 200 \qquad ; \qquad G(x) = 6x^4 + 4x^2 + 200$$

Determine

a) La función que define el beneficio anual en euros. ¿Cuándo el beneficio es nulo?

b) Número de unidades vendidas que hace mínima la función beneficio.

c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento del beneficio.

Solución.

a) Función beneficio y puntos de beneficio nulo

El beneficio es la diferencia entre ingresos y gastos:

$$\begin{aligned} B(x) &= I(x) - G(x) = (6x^4 + 6x^2 - 20x - 200) - (6x^4 + 4x^2 + 200) \\ &= 6x^4 - 6x^4 + 6x^2 - 4x^2 - 20x - 200 - 200 \\ B(x) &= 2x^2 - 20x - 400 \end{aligned}$$

(Los términos de grado 4 se cancelan: el beneficio es una parábola.)

Beneficio nulo: $B(x) = 0$

$$2x^2 - 20x - 400 = 0 \implies x^2 - 10x - 200 = 0$$

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{100 + 800}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{900}}{2} = \frac{10 \pm 30}{2} \implies x_1 = 20, \quad x_2 = -10$$

Como x es un número de unidades vendidas, debe ser $x \geq 0$ y se descarta $x_2 = -10$.

El beneficio es nulo cuando se venden 20 unidades.

b) Unidades que minimizan el beneficio

$$B'(x) = 4x - 20 = 0 \implies x = 5$$

Comprobamos con la segunda derivada: $B''(x) = 4 > 0$, luego en $x = 5$ hay un **mínimo**.

Se alcanza el beneficio mínimo vendiendo 5 unidades, con $B(5) = 2(25) - 20(5) - 400 = 50 - 100 - 400 = -450$ €, es decir, unas pérdidas de 450 €.

c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento

El signo de $B'(x) = 4x - 20$:

- $B'(x) < 0$ si $x < 5 \Rightarrow$ **decreciente en** $(-\infty, 5)$; en el contexto del problema, en $[0, 5)$.
- $B'(x) > 0$ si $x > 5 \Rightarrow$ **creciente en** $(5, +\infty)$.

Interpretación económica: hasta las 5 unidades el beneficio empeora (las pérdidas aumentan), a partir de ahí mejora, y no se empieza a ganar dinero hasta superar las 20 unidades vendidas.

3. En un centro de secundaria, aprueban Biología 4 de cada 5 alumnos, las Matemáticas las aprueban 2 de cada 3 alumnos y 3 de cada 5 alumnos aprueban Lengua.

a) Nombra los sucesos del experimento y determina las probabilidades de los mismos. Elegido al azar un alumno matriculado de esas asignaturas en ese centro. Calcula:

b) Probabilidad de que suspenda las tres asignaturas.

c) Probabilidad de que suspenda solo una de las asignaturas.

Solución.

a) Sucesos y probabilidades

Experimento: elegir al azar un alumno matriculado de las tres asignaturas. Definimos:

$$\begin{array}{lll} B = \text{“aprobar Biología”} & p(B) = \dfrac{4}{5} = 0,8 & p(\bar{B}) = \dfrac{1}{5} = 0,2 \\ M = \text{“aprobar Matemáticas”} & p(M) = \dfrac{2}{3} = 0,\widehat{6} & p(\bar{M}) = \dfrac{1}{3} = 0,\widehat{3} \\ L = \text{“aprobar Lengua”} & p(L) = \dfrac{3}{5} = 0,6 & p(\bar{L}) = \dfrac{2}{5} = 0,4 \end{array}$$

Los sucesos contrarios $\bar{B}$, $\bar{M}$, $\bar{L}$ representan suspender cada asignatura. Suponemos que los tres sucesos son **independientes** (aprobar una asignatura no condiciona aprobar otra), hipótesis necesaria para poder multiplicar las probabilidades.

b) Probabilidad de suspender las tres asignaturas

$$p(\bar{B} \cap \bar{M} \cap \bar{L}) = p(\bar{B}) \cdot p(\bar{M}) \cdot p(\bar{L}) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{75} \approx 0,0267$$

Es decir, aproximadamente un **2,67 %**.

c) Probabilidad de suspender solo una de las asignaturas

“Solo una” significa suspender exactamente una y aprobar las otras dos. Son tres casos incompatibles, así que calculamos cada uno y sumamos:

$$\text{Suspende solo Biología:} \quad p(\bar{B} \cap M \cap L) = \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{75}$$

$$\text{Suspende solo Matemáticas:} \quad p(B \cap \bar{M} \cap L) = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{12}{75}$$

$$\text{Suspende solo Lengua:} \quad p(B \cap M \cap \bar{L}) = \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{16}{75}$$

$$p(\text{suspender solo una}) = \frac{6}{75} + \frac{12}{75} + \frac{16}{75} = \frac{34}{75} \approx 0,4533$$

Es decir, aproximadamente un **45,33 %**.

SOLUCIONARIO RÁPIDO – PARTE TEST

Pregunta	Respuesta	Clave
1	a)	Definición: cuadrada + ceros fuera de la diagonal
2	a)	3×2 por 2×3 sí se puede: sale la matriz nula 3×3
3	b)	$\lvert A \rvert = 1$, invertible
4	c)	Sale $(-\infty, -4)$, que no está entre las opciones
5	b)	$x \to -\infty \Rightarrow -6x \to +\infty \Rightarrow -e^{-6x} \to -\infty$
6	c)	$x^2 + 6 > 0$ siempre: el dominio es $\mathbb{R}$
7	a)	$f'(x) = \frac{6x(x-6)}{(x-3)^2}$: máximo en $x = 0$, mínimo en $x = 6$
8	c)	El integrando se simplifica a 0: la integral es C
9	b)	$a + b = 1 - 0,71 = 0,29$ y ambas ≥ 0
10	a)	$p(B) = p(A \cap B)/p(A/B) = 0,2/0,8$
11	a)	Tabla $N(0,1)$: fila 1,1 y columna 0,07
12	a)	$\sqrt{n} \geq 1,96 \cdot 2/0,25 \Rightarrow n \geq 245,86$, se redondea al alza

Estrategia de examen. Solo hay que responder 8 de las 12 preguntas tipo test y cada fallo penaliza 0,25 puntos. Conviene seleccionar las 8 con mayor seguridad y dejar sin responder aquellas en las que no se pueda descartar al menos dos opciones: el valor esperado de una respuesta al azar entre tres opciones es negativo ($\frac{1}{3} \cdot 0,5 - \frac{2}{3} \cdot 0,25 = 0$ exactamente si se responde totalmente al azar, y negativo si se tiene un sesgo hacia una opción incorrecta).

Ojo con las opciones "Ninguna de las otras". En este examen son la respuesta correcta en tres preguntas (4, 6 y 8). El patrón es siempre el mismo: las opciones a) y b) recogen los errores típicos, y el cálculo bien hecho da un resultado que no aparece. Nunca hay que descartar la opción c) por sistema.