MATEMÁTICAS II

EXAMEN OFICIAL REALIZADO EN ESPAÑA EN LA CONVOCATORIA ORDINARIA PCE UNEDASISS 2024

EXAMEN RESUELTO

PARTE TEST

Deben responderse 10 preguntas del total de tipo test. Cada respuesta correcta suma 0.5 puntos. Las respuesta incorrectas penalizan 0.1 puntos. No responder no suma ni resta puntuación.

1. Todo sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas:

a) Puede tener exactamente dos soluciones

b) Si tiene un número par (mayor que 0) de soluciones, tiene infinitas

c) Ninguna de las anteriores

Solución.

Respuesta: b)

El resultado fundamental es que un sistema lineal solo puede tener **0, 1 o infinitas** soluciones. Nunca una cantidad finita mayor que 1. (Geométricamente: dos rectas del plano o no se cortan, o se cortan en un punto, o son la misma recta.)

a) es falsa: exactamente dos soluciones es imposible. Si hubiera dos soluciones distintas X_1 y X_2, toda combinación $X_1 + t(X_2 - X_1)$ con $t \in \mathbb{R}$ también sería solución, y ya habría infinitas.

b) es verdadera. Un número par mayor que 0 de soluciones finito $(2, 4, 6 \ldots)$ es imposible por lo anterior; la única cantidad compatible con la hipótesis es "infinitas". La afirmación se cumple, por tanto, en todos los casos en que su hipótesis puede darse.

2. Si A, B son matrices reales tales que es posible formar el producto AB y, además, rango $(A) = 2$ y rango $(B) = 3$, entonces rango (AB) es:

a) 6

b) 3

c) Ninguna de las anteriores

Solución.

Respuesta: c)

La propiedad clave del rango de un producto es:

$$\text{rango}(AB) \leq \min\{\text{rango}(A),\ \text{rango}(B)\} = \min\{2, 3\} = 2$$

Por tanto el rango de AB es **como mucho 2**, lo que descarta de inmediato a) (6, que sería el producto de los rangos: los rangos *no* se multiplican) y b) (3, que ya supera la cota).

Además, el valor exacto **no está determinado**: puede ser 0, 1 o 2 según las matrices concretas. Como ninguna de las dos opciones se cumple, la respuesta es c).

3. Todo sistema de ecuaciones lineales que tiene más ecuaciones que incógnitas:

a) Es incompatible

b) Es compatible indeterminado

c) Ninguna de las anteriores

Solución.

Respuesta: c)

Tener más ecuaciones que incógnitas **no determina** el carácter del sistema. Basta con dar contraejemplos de los tres tipos, todos con 3 ecuaciones y 2 incógnitas:

- **Compatible determinado:** $\{x = 1;\ y = 2;\ x + y = 3\}$. Solución única $(1, 2)$.
- **Compatible indeterminado:** $\{x + y = 1;\ 2x + 2y = 2;\ 3x + 3y = 3\}$. Las tres ecuaciones son la misma: infinitas soluciones.
- **Incompatible:** $\{x = 1;\ x = 2;\ y = 0\}$. No hay solución.

Como los tres casos son posibles, ni a) ni b) se cumplen "siempre". La respuesta es c).

Idea de fondo: lo que decide el carácter del sistema es la comparación de rangos (Rouché-Frobenius), no el recuento de ecuaciones.

4. Si A es una matriz real $m \times n$ (con m distinto de n) y B es otra matriz tal que existen los productos AB y BA:

a) Entonces B es una matriz $n \times n$

b) Entonces B es una matriz $n \times m$

c) Ninguna de las anteriores

Solución.

Respuesta: b)

Sea B de orden $p \times q$. Imponemos las dos condiciones de existencia del producto (columnas del primero = filas del segundo):

- Para que exista AB: A es $m \times \mathbf{n}$ y B es $\mathbf{p} \times q \quad \Rightarrow \quad p = n$.
- Para que exista BA: B es $p \times \mathbf{q}$ y A es $\mathbf{m} \times n \quad \Rightarrow \quad q = m$.

Luego B es de orden $\boxed{n \times m}$.

La opción a) solo sería válida si $m = n$, caso que el enunciado excluye expresamente. Ese inciso —"con m distinto de n"— es la clave de la pregunta.

5. En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$

a) Puede haber un sistema generador con cuatro vectores

b) Los elementos de todo sistema generador forman una base

c) Ninguna de las anteriores

Solución.

Respuesta: a)

Un **sistema generador** es un conjunto de vectores cuyas combinaciones lineales permiten obtener *cualquier* vector del espacio. No se exige que sean linealmente independientes ni que sean los mínimos posibles.

a) es verdadera. Ejemplo inmediato:

$$\{(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1),\ (1,1,1)\}$$

Los tres primeros ya generan $\mathbb{R}^3$, así que el conjunto de los cuatro también lo genera. Es un sistema generador con cuatro vectores (eso sí, *no* es una base: sobra uno).

b) es falsa. Una **base** es un sistema generador *linealmente independiente*. El ejemplo anterior es generador pero no base, ya que $(1,1,1)$ depende de los otros tres. Un sistema generador de $\mathbb{R}^3$ tiene al menos 3 vectores, pero puede tener muchos más.

6. Dados los puntos del espacio $A\,(1,7,11)$ y $B\,(4,-2,17)$, otro punto alineado con ellos $P\,(a,b,c)$ y tal que está a la mitad de distancia de A que de B, cumple:

a) $a+b+c=19$

b) $a\cdot b\cdot c<0$

c) Ninguna de las anteriores

Solución.

Respuesta: a)

Camino elegante (el que ahorra todo el cálculo). Observemos las sumas de coordenadas de los datos:

$$1+7+11=19 \qquad\qquad 4+(-2)+17=19$$

Ambos puntos pertenecen al plano $x+y+z=19$. Como dos puntos determinan una recta y esa recta está contenida en el plano que los contiene a ambos, **todo punto alineado con A y B cumple** $a+b+c=19$, sea cual sea su posición. La opción a) es verdadera *siempre*.

Comprobación por cálculo. La condición $d(P,A)=\frac{1}{2}d(P,B)$ admite dos puntos:

Caso 1 — P entre A y B: entonces $\overline{PA}=\frac{1}{3}\overline{AB}$, y con $\vec{AB}=(3,-9,6)$:

$$P=A+\frac{1}{3}\vec{AB}=(1,7,11)+(1,-3,2)=(2,4,13)\implies 2+4+13=19\ \checkmark$$

Caso 2 — P fuera del segmento, al otro lado de A: entonces $\overline{PA}=\overline{AB}$ y

$$P=A-\vec{AB}=(1,7,11)-(3,-9,6)=(-2,16,5)\implies -2+16+5=19\ \checkmark$$

Por qué b) es falsa. No se cumple siempre: en el caso 1, $a\cdot b\cdot c=2\cdot 4\cdot 13=104>0$. (En el caso 2 sí sería negativo, pero eso basta para que la afirmación no sea universal.) La opción a), en cambio, se cumple en ambos.

7. El valor de $k\in\mathbb{R}$ para el cual los vectores $u=(k,1)$ y $v=(6,3)$ son linealmente dependientes es:

a) Puede ser negativo

b) Es impar

c) Ninguna de las anteriores

Solución.

Respuesta: c)

Dos vectores del plano son linealmente dependientes si y solo si son proporcionales, lo que equivale a que el determinante que forman se anule:

$$\begin{vmatrix} k & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 3k - 6 = 0 \implies k = 2$$

(O directamente por proporcionalidad: $\frac{k}{6} = \frac{1}{3} \Rightarrow k = 2$.)

El valor es **único**: $k = 2$.

- a) es falsa: $k = 2 > 0$, y no hay otro valor posible.
- b) es falsa: 2 es **par**.

Por tanto, c).

8. La integral definida

$$\mathrm{I} = \int_{-5}^{5} \frac{x^{2023}}{x^{2024} + 2}\, dx$$

a) Cumple que $I > 1$

b) Cumple que $I < 1$

c) Ninguna de las anteriores

Solución.

Respuesta: b)

No hay que calcular la primitiva: basta estudiar la *simetría* del integrando. Sea $f(x) = \dfrac{x^{2023}}{x^{2024} + 2}$:

$$f(-x) = \frac{(-x)^{2023}}{(-x)^{2024} + 2} = \frac{-x^{2023}}{x^{2024} + 2} = -f(x)$$

(porque 2023 es **impar** y 2024 es **par**). La función es **impar**.

La integral de una función impar sobre un intervalo **simétrico** respecto al origen, como $[-5, 5]$, es cero:

$$I = 0$$

Por tanto $I = 0 < 1$: la opción b) es correcta y a) es falsa.

La trampa: los exponentes gigantes están puestos para que el alumno se asuste e intente integrar (lo cual sería viable por cambio de variable, pero costoso). La paridad de los exponentes es toda la pregunta.

9. La integral

$$\int_{0}^{\pi} (x + \operatorname{sen} x)\, dx$$

a) Es menor o igual a cero

b) Es mayor que $\dfrac{\pi^2}{2}$

c) Ninguna de las anteriores

Solución.

Respuesta: b)

Es una integral inmediata:

$$\int_0^{\pi} (x + \operatorname{sen} x)\, dx = \left[\frac{x^2}{2} - \cos x\right]_0^{\pi} = \left(\frac{\pi^2}{2} - \cos\pi\right) - (0 - \cos 0)$$

$$= \left(\frac{\pi^2}{2} + 1\right) - (-1) = \frac{\pi^2}{2} + 2 \approx 4,93 + 2 = 6,93$$

Como $\frac{\pi^2}{2} + 2 > \frac{\pi^2}{2}$, la opción b) es correcta. La a) es claramente falsa (el integrando es positivo en todo $(0, \pi)$, así que la integral debía salir positiva).

Atajo: sin calcular nada, $\int_0^{\pi} x\, dx = \frac{\pi^2}{2}$ y $\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\, dx > 0$, luego la suma *tiene* que superar $\frac{\pi^2}{2}$.

10. La función $f(x) = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 7$

a) Es decreciente en el intervalo $(0, 2)$

b) Es creciente en el intervalo $(1, 2)$

c) Ninguna de las anteriores

Solución.

Respuesta: b)

Derivamos y factorizamos (aquí está todo el trabajo):

$$f'(x) = 4x^3 - 24x^2 + 44x - 24 = 4\left(x^3 - 6x^2 + 11x - 6\right)$$

Por Ruffini, $x = 1$ es raíz ($1 - 6 + 11 - 6 = 0$), y el cociente $x^2 - 5x + 6$ factoriza en $(x - 2)(x - 3)$:

$$f'(x) = 4(x - 1)(x - 2)(x - 3)$$

Tabla de signos:

Intervalo	$(-\infty, 1)$	$(1, 2)$	$(2, 3)$	$(3, +\infty)$
Signo de f'	$-$	$+$	$-$	$+$
f	decreciente	**creciente**	decreciente	creciente

b) es verdadera: en $(1, 2)$ se tiene $f' > 0$ (por ejemplo, $f'(1,5) = 4(0,5)(-0,5)(-1,5) = 1,5 > 0$).

a) es falsa: el intervalo $(0, 2)$ contiene el punto $x = 1$, donde la función cambia de decreciente a creciente. En $(0, 1)$ decrece pero en $(1, 2)$ crece, así que *no* es decreciente en todo $(0, 2)$.

11. El límite

$$\lim_{x \to 7} \frac{2 - \sqrt{x - 3}}{x^2 - 49}$$

a) No existe

b) Es igual a 0

c) Ninguna de las anteriores

Solución.

Respuesta: c)

Al sustituir aparece la indeterminación $\frac{0}{0}$: $\quad 2-\sqrt{4}=0 \quad$ y $\quad 49-49=0$.

Multiplicamos por el conjugado del numerador:

$$\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}\cdot\frac{2+\sqrt{x-3}}{2+\sqrt{x-3}}=\frac{4-(x-3)}{(x^2-49)\left(2+\sqrt{x-3}\right)}=\frac{7-x}{(x-7)(x+7)\left(2+\sqrt{x-3}\right)}$$

Como $7-x=-(x-7)$, simplificamos el factor conflictivo:

$$=\frac{-1}{(x+7)\left(2+\sqrt{x-3}\right)}$$

Ahora sustituimos sin problema:

$$\lim_{x\to 7}\frac{-1}{(x+7)\left(2+\sqrt{x-3}\right)}=\frac{-1}{14\cdot(2+2)}=\boxed{-\frac{1}{56}}\approx -0,0179$$

El límite **existe** (descarta a) y **no vale 0** (descarta b). La respuesta es c).

Nota: también se puede resolver por L'Hôpital y se llega al mismo valor.

12. Sean A, B dos sucesos tales que la probabilidad de que ocurran simultáneamente es $P=1/4$. Entonces, la probabilidad de que al menos uno de los dos no ocurra es:

a) Es menor que 0.4

b) Es mayor que 0.6

c) Ninguna de las anteriores

Solución.

Respuesta: b)

"Ocurren simultáneamente" es $A\cap B$, luego $p(A\cap B)=\frac{1}{4}$.

"Al menos uno de los dos **no** ocurre" es $\bar{A}\cup\bar{B}$. Por las **leyes de De Morgan**, ese suceso es exactamente el contrario de que ocurran los dos:

$$\bar{A}\cup\bar{B}=\overline{A\cap B}$$

$$p(\bar{A}\cup\bar{B})=1-p(A\cap B)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}=0,75$$

Como $0,75>0,6$, la respuesta es b) (y a) es falsa).

Clave: reconocer que "al menos uno no ocurre" es el complementario de "ocurren los dos". Traducir el lenguaje al álgebra de sucesos resuelve la pregunta en una línea.

13. Se lanzan simultáneamente 4 monedas. La probabilidad de obtener, al menos, una cara:

a) Es mayor a 0.8

b) Es menor que 0.3

c) Ninguna de las anteriores

Solución.

Respuesta: a)

Calcular "al menos una" directamente obligaría a sumar los casos de 1, 2, 3 y 4 caras. Es mucho más rápido usar el **suceso contrario**: "al menos una cara" es lo contrario de "ninguna cara" (las cuatro cruces).

$$p(\text{ninguna cara}) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$$

$$p(\text{al menos una cara}) = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16} = 0,9375$$

Como $0,9375 > 0,8$, la respuesta es a).

14. Sean A, B, C sucesos arbitrarios de un experimento aleatorio. El suceso "ocurren exactamente dos sucesos de entre los A, B, C" se expresa:

a) $(A \cup B) \cap (A \cup C) \cap (B \cup C)$

b) $(A \cap B \cap \bar{C}) \cup (A \cap \bar{B} \cap C) \cup (\bar{A} \cap B \cap C)$, donde la barra denota el suceso complementario

c) Ninguna de las anteriores

Solución.

Respuesta: b)

"Exactamente dos" significa que ocurren dos **y el tercero no**. Hay tres formas de elegir cuál es el que falla, y son incompatibles entre sí, de ahí la unión:

- Ocurren A y B, no ocurre C: $A \cap B \cap \bar{C}$
- Ocurren A y C, no ocurre B: $A \cap \bar{B} \cap C$
- Ocurren B y C, no ocurre A: $\bar{A} \cap B \cap C$

La unión de los tres es exactamente la opción b).

a) es falsa. La expresión $(A \cup B) \cap (A \cup C) \cap (B \cup C)$ describe "ocurren **al menos** dos". La diferencia está en que **incluye el caso de que ocurran los tres**: si A, B y C ocurren, las tres uniones se verifican y el punto pertenece a la intersección. La palabra "exactamente" es la que separa una opción de la otra.

15. Sean A, B dos sucesos tales que $p(A) = 2/5$, $p(B) = 1/3$ y $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{1}{3}$, donde la barra denota el suceso complementario. Entonces:

a) $0,6 \leq p(A \cup B) \leq 0,7$

b) $0,1 \leq p(A \cap B) \leq 0,2$

c) Ninguna de las anteriores

Solución.

Respuesta: a)

Paso 1 — Hallar $p(A \cup B)$. Por De Morgan, $\bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cup B}$, luego:

$$p(A \cup B) = 1 - p(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \approx 0,667$$

Como $0,6 \leq 0,667 \leq 0,7$, la **opción a) es verdadera**.

Paso 2 — Comprobamos b). De $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$ despejamos:

$$p(A \cap B) = p(A) + p(B) - p(A \cup B) = \frac{2}{5} + \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = \frac{2}{5} - \frac{1}{3} = \frac{6-5}{15} = \frac{1}{15} \approx 0,067$$

Como $0,067 < 0,1$, la opción b) es **falsa** (queda justo por debajo del intervalo propuesto).

La respuesta es a).

PARTE DESARROLLO

Escoger una opción (5 puntos).

OPCIÓN 1

1. Estudiar la existencia de inversa, según los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$, para la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$$

En el caso $a = 1/2$. Calcular la traza (suma de los elementos de la diagonal) de A^{-1}

Solución.

Parte 1 — Existencia de inversa

Una matriz cuadrada tiene inversa si y solo si su determinante es distinto de cero. Calculamos $|A|$ desarrollando por la primera fila:

$$|A| = 1\begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} a & a \\ a & 1 \end{vmatrix} + a\begin{vmatrix} a & 1 \\ a & a \end{vmatrix} = (1-a^2) - (a-a^2) + a(a^2-a)$$

$$= 1 - a^2 - a + a^2 + a^3 - a^2 = a^3 - a^2 - a + 1$$

Factorizamos sacando factor común por grupos:

$$|A| = a^2(a-1) - (a-1) = (a-1)(a^2-1) = (a-1)(a-1)(a+1) = \boxed{(a-1)^2(a+1)}$$

El determinante se anula cuando $a = 1$ (raíz doble) o $a = -1$ (raíz simple). Por tanto:

Valor de a	**Existencia de A^{-1}**
$a = 1$ o $a = -1$	$\|A\| = 0$: la matriz **no** tiene inversa (es singular)
$a \neq 1$ y $a \neq -1$	$\|A\| \neq 0$: la matriz **sí** tiene inversa (es regular)

Parte 2 — Traza de A^{-1} para $a = 1/2$

Como $\frac{1}{2} \neq \pm 1$, la inversa existe. Su determinante:

$$|A| = \left(\frac{1}{2} - 1\right)^2 \left(\frac{1}{2} + 1\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{8}$$

Truco fundamental: nos piden *solo la traza*, no la inversa completa. Como

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\,[\mathrm{Adj}(A)]^t$$

y la trasposición **no altera los elementos de la diagonal principal**, basta calcular los tres adjuntos de la diagonal. Además, los tres llevan signo + (posiciones 1+1, 2+2, 3+3 son pares). Nos ahorramos seis de los nueve adjuntos.

Con $a = \frac{1}{2}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Primer adjunto (tachamos fila 1 y columna 1):

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Segundo adjunto (tachamos fila 2 y columna 2):

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Tercer adjunto (tachamos fila 3 y columna 3):

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1/2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Los elementos de la diagonal de A^{-1} son cada adjunto dividido entre $|A| = \frac{3}{8}$, es decir, multiplicado por $\frac{8}{3}$:

$$\frac{8}{3} \cdot \frac{3}{4} = 2 \qquad \frac{8}{3} \cdot \frac{3}{4} = 2 \qquad \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{3}$$

$$\operatorname{tr}(A^{-1}) = 2 + 2 + \frac{4}{3} = \frac{6+6+4}{3} = \boxed{\frac{16}{3}} \approx 5,33$$

2. Calcular las dimensiones del rectángulo de mayor área que puede inscribirse con su base en el eje horizontal y limitado por las curvas $y^2 = 8x$, $x = 4$. ¿Cuál es el área?

Solución.

Planteamiento. La curva $y^2 = 8x$ es una **parábola con eje horizontal** abierta hacia la derecha y vértice en el origen; su rama superior es $y = \sqrt{8x}$. La recta $x = 4$ es una vertical. La región de trabajo (en el semiplano superior) queda limitada por la parábola a la izquierda, la recta $x = 4$ a la derecha y el eje OX abajo.

Tomamos un punto genérico $(x, \sqrt{8x})$ de la parábola, con $0 \le x \le 4$, y construimos el rectángulo con base en el eje OX que llega hasta $x = 4$:

- **Base:** $4 - x$ (desde el punto hasta la recta $x = 4$)
- **Altura:** $y = \sqrt{8x}$ (la ordenada de la parábola en ese punto)

Función objetivo:

$$\boxed{A(x) = (4-x)\sqrt{8x}} \qquad \text{con } x \in (0, 4)$$

Optimización. Derivamos como producto:

$$A'(x) = -\sqrt{8x} + (4-x) \cdot \frac{8}{2\sqrt{8x}} = \frac{-8x + 4(4-x)}{\sqrt{8x}} = \frac{16 - 12x}{\sqrt{8x}}$$

Simplificando ($\sqrt{8x} = 2\sqrt{2}\sqrt{x}$):

$$A'(x) = \frac{4(4-3x)}{2\sqrt{2}\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{2}\,(4-3x)}{\sqrt{x}} = \frac{-\sqrt{2}\,(3x-4)}{\sqrt{x}}$$

$$A'(x) = 0 \implies 3x - 4 = 0 \implies \boxed{x = \frac{4}{3}}$$

Comprobación de que es máximo. Escribimos $A'(x) = \sqrt{2}\left(4x^{-1/2} - 3x^{1/2}\right)$ y derivamos otra vez:

$$A''(x) = \sqrt{2}\left(-2x^{-3/2} - \frac{3}{2}x^{-1/2}\right) = -\sqrt{2}\left(\frac{2}{x^{3/2}} + \frac{3}{2\sqrt{x}}\right)$$

Para todo $x > 0$ los dos sumandos del paréntesis son positivos, luego $A''(x) < 0$ siempre. En particular $A''\left(\frac{4}{3}\right) \approx -3,67 < 0$: se trata de un **máximo**. ✓

(Alternativa igual de válida: estudiar el signo de A', que es positivo antes de $\frac{4}{3}$ y negativo después.)

Dimensiones del rectángulo.

$$\text{Base} = 4 - \frac{4}{3} = \boxed{\frac{8}{3}} \approx 2,67$$

$$\text{Altura} = \sqrt{8 \cdot \frac{4}{3}} = \sqrt{\frac{32}{3}} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{6}}{3} \approx \boxed{3,27}$$

Área máxima.

$$A\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{8}{3} \cdot \frac{4\sqrt{6}}{3} = \frac{32\sqrt{6}}{9} \approx 8,71 \text{ unidades cuadradas}$$

(Expresión equivalente: $\dfrac{32\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$; conviene racionalizar el denominador y dejarlo como $\dfrac{32\sqrt{6}}{9}$.)

OPCIÓN 2

3. Dados los planos $\pi_1 = 2x - y + z = 3$; $\pi_2 = x - y + z = 2$, $\pi_3 = 3x - y - az = b$, determinar los valores $a, b \in \mathbb{R}$ para que definan una única recta y obtener un vector director de la misma.

Solución.

Planteamiento. Los tres planos definen una única recta cuando el sistema formado por sus tres ecuaciones es **compatible indeterminado con un grado de libertad**, es decir (Rouché-Frobenius, con 3 incógnitas):

$$\text{rango}(M) = \text{rango}(M^*) = 2$$

Paso 1 — Imponer rango$(M) = 2$

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -a \end{pmatrix}$$

$$|M| = 2\,[(-1)(-a) - 1(-1)] - (-1)\,[1(-a) - 1 \cdot 3] + 1\,[1(-1) - (-1) \cdot 3]$$
$$= 2(a+1) + (-a-3) + (-1+3) = 2a + 2 - a - 3 + 2 = \boxed{a+1}$$

Para que el rango *no* sea 3, el determinante debe anularse:

$$a + 1 = 0 \implies a = -1$$

Con $a = -1$ el rango es exactamente 2 (no puede ser menor), pues el menor formado por las dos primeras filas y columnas no se anula:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 1 = -1 \neq 0$$

Paso 2 — Imponer rango$(M^*) = 2$

$$M^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & b \end{array}\right)$$

Orlamos el menor no nulo con la columna de términos independientes. Analizamos los menores de orden 3 que contienen la última columna:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & b \end{vmatrix} = 0 \quad \text{(la 1.ª columna es proporcional a la 2.ª: siempre nulo)}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & b \end{vmatrix} = b - 4 \qquad \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & b \end{vmatrix} = -b + 4$$

Ambos se anulan **simultáneamente** si y solo si $b = 4$.

$$\boxed{a = -1, \qquad b = 4}$$

Paso 3 — Vector director de la recta

Con esos valores, el sistema queda:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x - y + z = 2 \\ 3x - y + z = 4 \end{cases}$$

La tercera ecuación es combinación lineal de las otras dos, así que la eliminamos y parametrizamos $z = \lambda$:

$$\begin{cases} 2x - y = 3 - \lambda \\ x - y = 2 - \lambda \end{cases}$$

Restando la segunda de la primera:

$$x = 1$$

Y sustituyendo en la segunda: $1 - y = 2 - \lambda \Rightarrow y = \lambda - 1$. Por tanto:

$$(x, y, z) = (1,\ \lambda - 1,\ \lambda) = (1, -1, 0) + \lambda(0, 1, 1)$$

El vector director es $\boxed{\vec{d} = (0, 1, 1)}$

Comprobación por producto vectorial (método alternativo y más rápido):

$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-1+1)\vec{i} - (2-1)\vec{j} + (-2+1)\vec{k} = (0, -1, -1)$$

que es proporcional a $(0, 1, 1)$. ✓

4. Se reparten 5 papeletas de una tira numerada del 1 al 40. Calcular la probabilidad de que exactamente tres de las papeletas estén numeradas con múltiplos de 10 (no es necesario dar el resultado con decimales basta con fracciones).

Solución.

Planteamiento. Entre los números del 1 al 40 hay exactamente **4 múltiplos de 10**: el 10, el 20, el 30 y el 40. Los otros **36** no lo son. Se reparten 5 papeletas **sin reposición** (no se pueden repetir), y queremos que exactamente 3 sean múltiplos de 10 y las otras 2 no.

Método 1 — Combinatorio (el más directo)

Es un caso de distribución **hipergeométrica**: elegimos 3 de los 4 múltiplos y 2 de los 36 restantes, sobre el total de formas de elegir 5 papeletas de 40:

$$p = \frac{\binom{4}{3}\binom{36}{2}}{\binom{40}{5}} = \frac{4 \cdot 630}{658\,008} = \frac{2\,520}{658\,008} = \boxed{\frac{35}{9\,139}} \approx 0,0038$$

Método 2 — Secuencial (regla del producto)

Calculamos la probabilidad de una *ordenación concreta*, por ejemplo múltiplo-múltiplo-múltiplo-no-no. Al extraer sin reposición, cada vez queda una papeleta menos:

$$\frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} \cdot \frac{2}{38} \cdot \frac{36}{37} \cdot \frac{35}{36}$$

Pero los 3 múltiplos pueden ocupar cualquier posición entre las 5 papeletas, y hay

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10 \text{ combinaciones}$$

todas con la misma probabilidad. Por tanto:

$$p = 10 \cdot \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} \cdot \frac{2}{38} \cdot \frac{36}{37} \cdot \frac{35}{36} = \frac{35}{9\,139} \approx 0,0038$$

Ambos métodos dan el mismo resultado, como debe ser: **la probabilidad es** $\frac{35}{9139}$, es decir, aproximadamente un **0,38 %**.

Advertencia: el error habitual es olvidar el factor $\binom{5}{3} = 10$ y quedarse con la probabilidad de un único orden concreto. Otro error frecuente es tratarlo como una binomial $B(5\,;\,0,1)$, lo que sería válido *con* reposición, pero aquí las papeletas no se devuelven.

SOLUCIONARIO RÁPIDO – PARTE TEST

Pregunta	Respuesta	Clave
1	b)	Un sistema lineal tiene 0, 1 o infinitas soluciones: nunca 2
2	c)	$\text{rango}(AB) \leq \min\{2,3\} = 2$: ni 6 ni 3
3	c)	Contraejemplos de los tres tipos; decide Rouché, no el recuento
4	b)	AB fuerza $p = n$; BA fuerza $q = m$
5	a)	Generador $\neq$ base: puede sobrar algún vector
6	a)	A y B están en el plano $x + y + z = 19$: toda la recta también
7	c)	$k = 2$: ni negativo ni impar
8	b)	Integrando impar en intervalo simétrico: $I = 0 < 1$
9	b)	Vale $\frac{\pi^2}{2} + 2$
10	b)	$f'(x) = 4(x-1)(x-2)(x-3)$: crece en $(1,2)$
11	c)	Por el conjugado sale $-\frac{1}{56}$: existe y no es 0
12	b)	De Morgan: $1 - \frac{1}{4} = 0,75 > 0,6$
13	a)	Contrario: $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 0,9375 > 0,8$
14	b)	a) sería "al menos dos" (incluye los tres)
15	a)	$p(A \cup B) = \frac{2}{3}$; $p(A \cap B) = \frac{1}{15} < 0,1$

La penalización invita a arriesgar. Con acierto $+0,5$ y error $-0,1$, responder al azar entre tres opciones tiene valor esperado $\frac{1}{3}(0,5) - \frac{2}{3}(0,1) = +0,1$ puntos. Dejar en blanco es matemáticamente peor que arriesgar: conviene contestar las 10 preguntas. (En Matemáticas CCSS, con $-0,25$, el consejo es el contrario.)

Este examen premia el razonamiento sobre el cálculo. Al menos ocho de las quince cuestiones se resuelven sin operar apenas: por simetría (la 8), por el suceso contrario (la 12 y la 13), por De Morgan (la 12 y la 15), por una propiedad de rangos (la 2) o encontrando un contraejemplo (la 3, la 5 y la 7). Antes de lanzarse a calcular conviene leer si el enunciado dice *siempre*, *puede* o *exactamente*: esas tres palabras deciden más preguntas que las derivadas.

Los atajos de la parte de desarrollo. En el problema 1, pedir solo la *traza* permite calcular tres adjuntos en vez de nueve, porque la trasposición no toca la diagonal. En el 4, el factor $\binom{5}{3} = 10$ es lo que separa la solución correcta del error más común. Localizar el atajo antes de empezar ahorra la mitad del tiempo.