MATEMÁTICAS II

EXAMEN OFICIAL REALIZADO EN ESPAÑA EN LA CONVOCATORIA
PCE UNEDASISS 2023

EXAMEN RESUELTO

Parte 1 – Bloque test. Bloque de 10 preguntas. Debe elegir 10 de las 15 preguntas. Cada acierto suma 0,5 puntos. Cada error resta 0,1 puntos. Solo hay que una respuesta correcta por cada cuestión

1. En el espacio tridimensional se consideran el plano $\pi : 3x - 2y - z = 2$ y la recta

$$r : \begin{cases} 2x + 2y + 2z = 1 \\ x + 3y - 3z = 3 \end{cases}$$

Entonces

a) El plano y la recta se cortan perpendicularmente

b) La recta está contenida en el plano

c) Ninguna de las otras dos

Solución.

Respuesta: a)

La recta viene dada como intersección de dos planos, así que su vector director es el producto vectorial de los dos vectores normales, $\vec{n}_1 = (2, 2, 2)$ y $\vec{n}_2 = (1, 3, -3)$:

$$\vec{d} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \end{vmatrix} = (-6 - 6)\vec{i} - (-6 - 2)\vec{j} + (6 - 2)\vec{k} = (-12, 8, 4)$$

Simplificando (dividiendo entre 4): $\vec{d} = (-3, 2, 1)$.

El vector normal del plano es $\vec{n}_\pi = (3, -2, -1)$. Observamos que:

$$\vec{n}_\pi = -\vec{d}$$

Es decir, **el director de la recta y el normal del plano son proporcionales**. Cuando esto ocurre, la recta es **perpendicular al plano** (y, por tanto, lo corta necesariamente en un punto).

Descartamos b): si la recta estuviera contenida en el plano, sería $\vec{d} \cdot \vec{n}_\pi = 0$, pero

$$\vec{d} \cdot \vec{n}_\pi = (-3)(3) + (2)(-2) + (1)(-1) = -9 - 4 - 1 = -14 \neq 0$$

2. Toda A matriz real cuadrada tal que $A^2 = A$, cumple que:

a) $\det(A) > 0$

b) Si A es regular, $A = I$ (la matriz identidad)

c) Ninguna de las anteriores

Solución.

Respuesta: b)

Las matrices que cumplen $A^2 = A$ se llaman **idempotentes**.

b) es verdadera: si A es regular, existe A^{-1}. Multiplicando $A^2 = A$ por A^{-1} por la izquierda:

$$A^{-1}A^2 = A^{-1}A \implies A = I$$

a) es falsa. Tomando determinantes en $A^2 = A$: $\det(A)^2 = \det(A)$, luego $\det(A) = 0$ o $\det(A) = 1$. El caso $\det(A) = 0$ es perfectamente posible: la **matriz nula** cumple $0^2 = 0$ y tiene determinante 0. Como no siempre es positivo, a) no se cumple "para toda A".

3. La distancia del punto $(2, 1, 3)$ a la recta $x = 2y = 3z$ es:

a) Mayor que 1

b) Menor que 1

c) Ninguna de las otras dos

Solución.

Respuesta: a)

Primero expresamos la recta en forma paramétrica. Haciendo $x = 2y = 3z = t$:

$$x = t, \qquad y = \frac{t}{2}, \qquad z = \frac{t}{3}$$

Pasa por el origen $O = (0, 0, 0)$ y su director es $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$, proporcional a $\vec{d} = (6, 3, 2)$.

Aplicamos la fórmula de la distancia de un punto a una recta, con $\vec{OP} = (2, 1, 3)$:

$$d(P, r) = \frac{|\vec{OP} \times \vec{d}|}{|\vec{d}|}$$

$$\vec{OP} \times \vec{d} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 3 \\ 6 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (2-9)\vec{i} - (4-18)\vec{j} + (6-6)\vec{k} = (-7, 14, 0)$$

$$|\vec{OP} \times \vec{d}| = \sqrt{49 + 196 + 0} = \sqrt{245} = 7\sqrt{5} \qquad |\vec{d}| = \sqrt{36 + 9 + 4} = \sqrt{49} = 7$$

$$d(P, r) = \frac{7\sqrt{5}}{7} = \sqrt{5} \approx 2,24 > 1$$

4. Se tienen dos sucesos A y B con probabilidades respectivas $p(A) = 0,6$ y $p(B) = 0,7$. Entonces:

a) Los sucesos A y B son tal que $A \cup B$ es necesariamente el espacio total

b) Los sucesos A y B pueden ser disjuntos

c) Ninguna de las otras dos

Solución.

Respuesta: c)

Partimos de $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 1,3 - p(A \cap B)$.

b) es falsa. Si fueran disjuntos, $p(A \cap B) = 0$ y entonces $p(A \cup B) = 1,3 > 1$, lo cual es **imposible**. De hecho, como $p(A \cup B) \leq 1$:

$$1,3 - p(A \cap B) \leq 1 \implies p(A \cap B) \geq 0,3$$

Los sucesos se solapan necesariamente en al menos un 30 %.

a) es falsa. Que la unión *pueda* ser el espacio total no significa que lo sea *necesariamente*. Basta un contraejemplo: si $p(A \cap B) = 0,4$, entonces $p(A \cup B) = 0,9 \neq 1$, situación perfectamente compatible con los datos.

Como ninguna de las dos afirmaciones se cumple siempre, la respuesta es c). *La clave está en la palabra "necesariamente".*

5. El límite $L = \lim_{x \to 0^+} x^n \cdot \ln x$ con $n > 0$:

a) Tiene un valor $L < 0$, independiente de n

b) No existe

c) Ninguna de las otras dos

Solución.

Respuesta: c)

Se trata de una indeterminación del tipo $0 \cdot (-\infty)$. La transformamos en un cociente para aplicar L'Hôpital:

$$L = \lim_{x \to 0^+} x^n \ln x = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{x^{-n}} \qquad \left[\frac{-\infty}{+\infty}\right]$$

Derivamos numerador y denominador:

$$L = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-n\, x^{-n-1}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} \cdot \frac{x^{n+1}}{-n} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^n}{-n} = \frac{0}{-n} = 0$$

El límite **existe y vale 0** para cualquier $n > 0$. Esto descarta b) (sí existe) y a) (vale 0, no es negativo).

Interpretación: la potencia x^n tiende a cero "más deprisa" de lo que $\ln x$ tiende a $-\infty$, y gana la potencia. Es un resultado que conviene tener memorizado.

6. Para toda $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ función continua en $[a, b]$ y tal que $f(a)\, f(b) > 0$, se cumple que:

a) Existe algún $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$

b) No necesariamente existe algún $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$

c) Ninguna de las otras dos.

Solución.

Respuesta: b)

La condición $f(a) \cdot f(b) > 0$ significa que $f(a)$ y $f(b)$ tienen el **mismo signo**. El **Teorema de Bolzano** exige justo lo contrario (signos opuestos, $f(a) \cdot f(b) < 0$) para garantizar una raíz, así que aquí **no se puede garantizar** nada:

- Puede que *no* haya raíz: $f(x) = x^2 + 1$ en $[-1, 1]$, con $f(-1) \cdot f(1) = 4 > 0$ y sin ceros.
- Puede que *sí* la haya: $f(x) = x^2 - 1$ en $[-2, 2]$, con $f(-2) \cdot f(2) = 9 > 0$ y raíces en $x = \pm 1$.

Como ambas situaciones son posibles, la afirmación correcta es la b): "no necesariamente existe". La opción a) sería cierta solo bajo la hipótesis de Bolzano.

7. Un dado no trucado se lanza dos veces. ¿Cuál es la probabilidad p de sacar un 2 en la primera tirada y no sacar el 4 en la segunda?

a) $0,1 < p < 0,15$

b) $0,15 < p < 0,2$

c) Ninguna de las otras dos.

Solución.

Respuesta: a)

Los dos lanzamientos son **independientes**, luego se multiplican las probabilidades:

$$p(\text{2 en la 1.ª}) = \frac{1}{6} \qquad p(\text{no 4 en la 2.ª}) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

$$p = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{36} = 0,1\overline{38} \approx 0,1389$$

Como $0,1 < 0,1389 < 0,15$, la respuesta es a).

8. Sea A la matriz real (con a, b, c arbitrarios)

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

Entonces, se cumple:

a) Si $b = c$, entonces rango $(A) = 1$

b) Si $b = 0$, entonces rango $(A) = 2$

c) Ninguna de las anteriores

Solución.

Respuesta: c)

La clave está en que a, b y c son **arbitrarios**: basta un contraejemplo para tumbar cada afirmación.

a) es falsa. Tomamos $a = 1$, $b = c = 1$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \det(A) = 1 \neq 0 \implies \text{rango}(A) = 2 \neq 1$$

b) es falsa. Tomamos $b = 0$ y además $a = c = 0$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \text{rango}(A) = 0 \neq 2$$

En realidad, $\det(A) = ac$, así que el rango es 2 si y solo si $a \neq 0$ *y* $c \neq 0$, con independencia del valor de b.

9. La función

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

a) Es creciente en todo su dominio

b) Es decreciente en $(-\infty, 0)$

c) Ninguna de las otras dos

Solución.

Respuesta: b)

Esta función es el **coseno hiperbólico**, $\cosh x$, y su dominio es todo $\mathbb{R}$. Derivamos:

$$f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Estudiamos su signo. Como e^x es creciente:

$$f'(x) < 0 \iff e^x < e^{-x} \iff x < -x \iff x < 0$$

Intervalo	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
Signo de f'	$-$	$+$
f	**decreciente**	creciente

Por tanto b) es correcta y a) es falsa (no es creciente en todo su dominio). En $x = 0$ hay un mínimo, con $f(0) = 1$: la gráfica es la clásica *catenaria*.

10. Toda matriz real A cuadrada invertible cumple que:

a) $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$, donde A^t es la traspuesta

b) $\det(A^{-1}) = -\det(A)$

c) Ninguna de las anteriores

Solución.

Respuesta: a)

a) es verdadera. Es una propiedad general: trasponer e invertir son operaciones que conmutan. Demostración rápida, partiendo de $(AB)^t = B^t A^t$:

$$A^t \cdot (A^{-1})^t = (A^{-1}A)^t = I^t = I$$

Como el producto da la identidad, $(A^{-1})^t$ es precisamente la inversa de A^t, es decir, $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

b) es falsa. La propiedad correcta es:

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

que se deduce de $\det(A) \cdot \det(A^{-1}) = \det(AA^{-1}) = \det(I) = 1$. El signo negativo de la opción b) no tiene ninguna justificación.

11. Sean las rectas $r : (0, -1, 1) + a(1, 3, -4)$ y $s : (1, 0, 0) + b(1, 0, 1)$ en el espacio:

a) Son secantes

b) La distancia entre ellas es $\sqrt{43}\,/\,43$

c) Ninguna de las otras dos

Solución.

Respuesta: b)

Datos: $P_r = (0,-1,1)$, $\vec{d_r} = (1,3,-4)$; $P_s = (1,0,0)$, $\vec{d_s} = (1,0,1)$.

Descartamos a). Si fueran secantes, existirían a y b con:

$$\begin{cases} a & = & 1+b \\ -1+3a & = & 0 \\ 1-4a & = & b \end{cases}$$

De la segunda ecuación, $a = \frac{1}{3}$. Sustituyendo en la primera: $b = a - 1 = -\frac{2}{3}$. Comprobamos en la tercera: $1 - \frac{4}{3} = -\frac{1}{3} \neq -\frac{2}{3}$. **Sistema incompatible**: las rectas *se cruzan* (no son secantes ni paralelas, pues los directores no son proporcionales).

Calculamos la distancia entre rectas que se cruzan:

$$\vec{d_r} \times \vec{d_s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (3-0)\vec{i} - (1+4)\vec{j} + (0-3)\vec{k} = (3,-5,-3)$$

$$|\vec{d_r} \times \vec{d_s}| = \sqrt{9+25+9} = \sqrt{43} \qquad \vec{P_rP_s} = (1,0,0) - (0,-1,1) = (1,1,-1)$$

$$d(r,s) = \frac{\left|\vec{P_rP_s} \cdot (\vec{d_r} \times \vec{d_s})\right|}{|\vec{d_r} \times \vec{d_s}|} = \frac{|3-5+3|}{\sqrt{43}} = \frac{1}{\sqrt{43}} = \frac{\sqrt{43}}{43}$$

Coincide exactamente con la opción b). *Nota:* que la distancia sea distinta de cero confirma, por otra vía, que las rectas no se cortan.

12. Se tiene un bote con caramelos de colores: rojo, amarillo, verde, azul y naranja. Se sabe que la probabilidad de sacar al azar un caramelo rojo es de 0,2, la de sacar uno amarillo es 0,15, uno verde 0,1 y uno azul 0,3. Si se sacan 60 caramelos de la bolsa, ¿cuántos esperaríamos que haya de color naranja (denotamos ese número por N)?

a) $8 \leq N \leq 14$

b) $13 \leq N \leq 18$

c) Ninguna de las otras dos

Solución.

Respuesta: b)

Como los cinco colores forman el espacio muestral completo, sus probabilidades suman 1:

$$p(\text{naranja}) = 1 - (0,2 + 0,15 + 0,1 + 0,3) = 1 - 0,75 = 0,25$$

El número esperado en 60 extracciones es la esperanza de una binomial $B(60\,;\,0,25)$:

$$N = n \cdot p = 60 \cdot 0,25 = 15$$

Como $13 \leq 15 \leq 18$, la respuesta es b). (El valor 15 no pertenece al intervalo de a), que llega hasta 14.)

13. Si la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & \lambda \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Es ortogonal, entonces:

a) $\lambda > 0$

b) $\lambda < 0$

c) Ninguna de las anteriores

Solución.

Respuesta: b)

Una matriz es **ortogonal** si $A^t A = I$, lo que equivale a que sus columnas sean vectores **unitarios y ortogonales entre sí**.

Condición 1 – columnas unitarias. La primera ya lo es: $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$ ✓. Imponiéndolo a la segunda:

$$\lambda^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = 1 \implies \lambda^2 = \frac{3}{4} \implies \lambda = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Condición 2 – columnas ortogonales (producto escalar nulo). Esta es la que decide el signo:

$$\frac{1}{2} \cdot \lambda + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \implies \frac{\lambda}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} = 0 \implies \lambda = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ambas condiciones se satisfacen a la vez solo con $\lambda = -\frac{\sqrt{3}}{2} \approx -0,87 < 0$. La respuesta es b).

Trampa: quedarse solo en la condición 1 lleva a $\lambda = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ y a marcar c) por creer que el signo es indeterminado. La ortogonalidad entre columnas es imprescindible.

14. Se pregunta a 50 consumidores si les gustan dos productos A y B. Hay 37 personas a las que les gusta el producto A y, de ellas, hay 25 a las que también les gusta el producto B. Hay 3 personas a las que no les gusta ninguna de los dos. Se elige al azar una de las personas entre las que sí les gusta B. ¿Cuál es la probabilidad p de que no le gusta A?

a) $0,25 < p < 0,3$

b) $0,2 < p < 0,25$

c) Ninguna de las otras dos.

Solución.

Respuesta: a)

Datos: total $= 50$; $|A| = 37$; $|A \cap B| = 25$; $|\overline{A \cup B}| = 3$.

Paso 1 – Hallar $|B|$. Los que gustan de al menos un producto son:

$$|A \cup B| = 50 - 3 = 47$$

Aplicando $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$:

$$47 = 37 + |B| - 25 \implies |B| = 35$$

Paso 2 – Tabla de contingencia (útil para no perderse):

	Les gusta B	No les gusta B	Total
Les gusta A	25	12	37
No les gusta A	10	3	13
Total	35	15	50

Paso 3 – Probabilidad condicionada. Nos restringimos a las 35 personas a las que les gusta B:

$$p = p(\bar{A}|B) = \frac{|\bar{A} \cap B|}{|B|} = \frac{10}{35} = \frac{2}{7} \approx 0,2857$$

Como $0,25 < 0,2857 < 0,3$, la respuesta es a).

15. Para toda $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) se cumple que:

a) Existe un $\theta \in (a, b)$ tal que $f(b) = f'(\theta)(b - a)$

b) Existe un $\theta \in (a, b)$ tal que $f(b) = f(a) + f'(\theta)(b - a)$

c) Ninguna de las otras dos

Solución.

Respuesta: b)

Las hipótesis (continua en el cerrado, derivable en el abierto) son exactamente las del **Teorema del Valor Medio de Lagrange**, que afirma que existe $\theta \in (a, b)$ tal que:

$$f'(\theta) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Despejando $f(b)$:

$$f(b) = f(a) + f'(\theta)(b - a)$$

que es literalmente la opción b).

a) es falsa: equivale a la fórmula anterior *solo* si $f(a) = 0$, hipótesis que aquí no se da. Contraejemplo: $f(x) = 5$ (constante) en $[0, 1]$. Entonces $f'(\theta) = 0$ para todo θ, y a) diría $5 = 0$. Absurdo.

Elija una sola opción y conteste a los problemas en hojas separadas

Opción 1

1.

a) Estudiar la posición relativa en el espacio de los planos π_1 y π_2, con ecuaciones respectivas:

$$\pi_1 : x + 2y - z = 3 \qquad \pi_2 : ax + (a-2)y + 2z = 4$$

En función del parámetro real $a \in \mathbb{R}$

b) Determinar, en el caso en que los planos se intersecten a lo largo de una recta, un vector director de la misma.

Solución.

a) Posición relativa de los dos planos

Formamos la matriz de coeficientes M y la ampliada M^*:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ a & a-2 & 2 \end{pmatrix} \qquad M^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ a & a-2 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

Dos planos son **paralelos o coincidentes** si sus vectores normales son proporcionales, es decir, si $\text{rango}(M) = 1$:

$$\frac{a}{1} = \frac{a-2}{2} = \frac{2}{-1}$$

De la última igualdad: $a = -2$. Comprobamos que también encaja en la del medio: $\frac{-2-2}{2} = \frac{-4}{2} = -2$ ✓. Los tres cocientes coinciden solo para $a = -2$.

Caso $a = -2$: el plano queda $\pi_2 : -2x - 4y + 2z = 4$, es decir, dividiendo entre -2:

$$\pi_2 : x + 2y - z = -2 \qquad \text{frente a} \qquad \pi_1 : x + 2y - z = 3$$

Mismo primer miembro y distinto término independiente $\Rightarrow \text{rango}(M) = 1 \neq 2 = \text{rango}(M^*)$: sistema **incompatible**. Los planos son **paralelos y distintos** (no coincidentes).

Caso $a \neq -2$: los normales no son proporcionales, luego $\text{rango}(M) = \text{rango}(M^*) = 2 < 3$: sistema **compatible indeterminado** con un grado de libertad. Los planos **se cortan en una recta**.

Valor de a	**Posición relativa**
$a = -2$	Planos paralelos y distintos (no hay puntos comunes)
$a \neq -2$	Los planos se cortan a lo largo de una recta

Obsérvese que **nunca son coincidentes**, ya que para $a = -2$ los términos independientes no son compatibles.

b) Vector director de la recta de intersección

Cuando dos planos se cortan, la recta intersección es perpendicular a ambos normales, luego su director es el producto vectorial de estos:

$$\vec{d} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ a & a-2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \vec{d} &= [2 \cdot 2 - (-1)(a-2)]\,\vec{i} - [1 \cdot 2 - (-1) \cdot a]\,\vec{j} + [1 \cdot (a-2) - 2a]\,\vec{k} \\ &= (4 + a - 2)\vec{i} - (2 + a)\vec{j} + (a - 2 - 2a)\vec{k} \\ &= (a+2)\vec{i} - (a+2)\vec{j} - (a+2)\vec{k} = (a+2)\,(1, -1, -1) \end{aligned}$$

Como estamos en el caso $a \neq -2$, se tiene $a+2 \neq 0$ y podemos simplificar el factor escalar:

$$\boxed{\vec{d} = (1, -1, -1)}$$

Resultado destacable: el vector director **no depende de** a. Todas las rectas de intersección, sea cual sea el parámetro, tienen la misma dirección; lo que cambia es su posición en el espacio. (Y es coherente que el factor se anule justo en $a = -2$: ahí no hay recta porque los planos son paralelos.)

2. Dada la función real $f(x) = \ln\left(\sqrt{4-x^2}\right)$ (donde ln denota el logaritmo natural o neperiano), se pide:

a) Representar gráficamente la curva $y = f(x)$, discutiendo razonadamente su dominio, asíntotas, intervalos de crecimientos y extremos relativos

b) Determinar las pendientes de las rectas tangentes a la gráfica de la función en los puntos donde corta al eje de abscisas. ¿Cuál es el ángulo que forma cada una de estas rectas tangente con el eje de las x?

Solución.

Simplificación previa (ahorra mucho trabajo): aplicando $\ln(\sqrt{u}) = \frac{1}{2}\ln u$,

$$f(x) = \ln\sqrt{4-x^2} = \frac{1}{2}\ln(4-x^2)$$

a) Estudio y representación

Dominio. El argumento del logaritmo debe ser estrictamente positivo:

$$4 - x^2 > 0 \implies x^2 < 4 \implies \boxed{\text{Dom}(f) = (-2, 2)}$$

Simetría. $f(-x) = \frac{1}{2}\ln(4-x^2) = f(x)$: función **par**, simétrica respecto al eje OY.

Cortes con los ejes.

- Con OY: $f(0) = \frac{1}{2}\ln 4 = \ln 2 \approx 0,693$. Punto $(0, \ln 2)$.
- Con OX: $\frac{1}{2}\ln(4-x^2) = 0 \Rightarrow 4 - x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3} \approx \pm 1,73$. Puntos $(\pm\sqrt{3}, 0)$.

Asíntotas. No hay horizontales ni oblicuas (el dominio es acotado). Verticales en los extremos del dominio:

$$\lim_{x\to -2^+} \frac{1}{2}\ln(4-x^2) = \frac{1}{2}\ln(0^+) = -\infty \qquad \lim_{x\to 2^-} \frac{1}{2}\ln(4-x^2) = -\infty$$

Hay **asíntotas verticales en** $x = -2$ **y** $x = 2$, con la curva descendiendo a $-\infty$ en ambas.

Monotonía y extremos.

$$f'(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{-2x}{4-x^2} = \frac{-x}{4-x^2}$$

En el dominio $(-2, 2)$ se cumple $4 - x^2 > 0$, así que el signo de f' es el de $-x$:

Intervalo	$(-2, 0)$	$(0, 2)$
Signo de f'	$+$	$-$
f	creciente	decreciente

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$. Pasa de creciente a decreciente: **máximo relativo (y absoluto) en** $(0, \ln 2)$. No hay mínimos relativos.

Gráfica. Curva con forma de campana invertida en los bordes: sube desde $-\infty$ en $x = -2$, cruza el eje X en $-\sqrt{3}$, alcanza el máximo $(0, \ln 2)$, y baja simétricamente cruzando el eje X en $\sqrt{3}$ hasta $-\infty$ en $x = 2$.

b) Pendientes y ángulos de las tangentes en los cortes con OX

Los cortes con el eje de abscisas están en $x = \pm\sqrt{3}$. La pendiente de la tangente es la derivada en cada punto:

$$m_1 = f'(-\sqrt{3}) = \frac{-(-\sqrt{3})}{4-3} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \qquad m_2 = f'(\sqrt{3}) = \frac{-\sqrt{3}}{4-3} = -\sqrt{3}$$

El ángulo α que forma una recta con el eje OX cumple $\tan\alpha = m$:

- En $(-\sqrt{3}, 0)$: $\tan\alpha = \sqrt{3} \Rightarrow \boxed{\alpha = 60}$ (es decir, $\pi/3$ radianes).
- En $(\sqrt{3}, 0)$: $\tan\alpha = -\sqrt{3} \Rightarrow \boxed{\alpha = 120}$ ($2\pi/3$ rad), equivalente a -60.

El resultado es coherente con la simetría par de la función: las dos tangentes son simétricas respecto al eje OY y forman el mismo ángulo de 60 con la horizontal, una subiendo y otra bajando.

Opción 2

1. Calculas las integrales indefinidas siguientes:

$$a)\int \frac{\ln x}{(x+1)^2}\,dx \qquad\qquad b)\int \frac{xe^x}{(1+x)^2}\,dx$$

Solución.

a) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{(x+1)^2}dx$ **— integración por partes**

Elegimos (regla ALPES: el logaritmo se deriva):

$$u=\ln x \;\Rightarrow\; du=\frac{1}{x}dx \qquad\qquad dv=\frac{dx}{(x+1)^2} \;\Rightarrow\; v=-\frac{1}{x+1}$$

Aplicamos $\int u\,dv = uv - \int v\,du$:

$$\int \frac{\ln x}{(x+1)^2}dx = -\frac{\ln x}{x+1}+\int \frac{1}{x(x+1)}dx$$

La integral que queda se resuelve por **fracciones simples**:

$$\frac{1}{x(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1} \;\Longrightarrow\; 1=A(x+1)+Bx$$

Para $x=0$: $A=1$. Para $x=-1$: $B=-1$. Por tanto:

$$\int \frac{dx}{x(x+1)}=\int\frac{dx}{x}-\int\frac{dx}{x+1}=\ln|x|-\ln|x+1|$$

Resultado:

$$\boxed{\int \frac{\ln x}{(x+1)^2}dx=-\frac{\ln x}{x+1}+\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|+C}$$

b) $\displaystyle\int \frac{xe^x}{(1+x)^2}dx$ **— integración por partes**

Elegimos:

$$u=xe^x \;\Rightarrow\; du=(e^x+xe^x)dx=e^x(1+x)\,dx \qquad\qquad dv=\frac{dx}{(1+x)^2} \;\Rightarrow\; v=-\frac{1}{1+x}$$

$$\int \frac{xe^x}{(1+x)^2}dx=-\frac{xe^x}{1+x}+\int\frac{e^x(1+x)}{1+x}dx=-\frac{xe^x}{1+x}+\int e^x dx=-\frac{xe^x}{1+x}+e^x+C$$

Sacamos factor común e^x y simplificamos:

$$e^x\left(1-\frac{x}{1+x}\right)+C=e^x\cdot\frac{1+x-x}{1+x}+C$$

$$\boxed{\int \frac{xe^x}{(1+x)^2}dx=\frac{e^x}{1+x}+C}$$

Comprobación (recomendable incluirla): derivando el resultado con la regla del cociente,

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{e^x}{1+x}\right]=\frac{e^x(1+x)-e^x}{(1+x)^2}=\frac{e^x\,x}{(1+x)^2}\;\checkmark$$

Truco: reconocer que el integrando es exactamente la derivada de $\frac{e^x}{1+x}$ permite resolver la integral *de un vistazo*, sin partes. Merece la pena tener presente el patrón $\int e^x\,[f(x)+f'(x)]\,dx = e^x f(x)+C$.

2. Se ha realizado un estudio de valoración de un determinado candidato político, tomando una muestra de 80 hombres y 120 mujeres, con los siguientes resultados (dados en función de un parámetro real $\delta \in \mathbb{R}$)

	Hombres	**Mujeres**	**Total**
Valoraciones positivas	$50-\delta$	$40+\delta$	90
Valoraciones negativas	$30+\delta$	$80-\delta$	110
Total	80	120	200

Si se elige una persona al azar de entre la muestra, calcular las probabilidades de los siguientes sucesos:

a) Sabiendo que es hombre, que tenga una valoración positiva del candidato.

b) Que sea hombre y favorable al candidato

c) Que sea mujer o que esté a favor del candidato

d) ¿Qué valor debe tener el parámetro δ para que los sucesos "ser mujeres" y "no estar a favor del candidato" sean independientes?

Solución.

Notación. Definimos los sucesos:

H = "ser hombre" M = "ser mujer" F = "valoración positiva (a favor)" $\bar{F}$ = "valoración negativa"

El total de la muestra es 200 personas.

a) $p(F|H)$ — probabilidad condicionada

Nos restringimos a la columna de los hombres (80 personas), de los cuales $50-\delta$ son favorables:

$$p(F|H) = \frac{|F \cap H|}{|H|} = \boxed{\frac{50-\delta}{80}}$$

b) $p(H \cap F)$ — probabilidad de la intersección

Ahora el denominador es la muestra completa:

$$p(H \cap F) = \frac{50-\delta}{200} \quad \boxed{= \frac{50-\delta}{200}}$$

Distinguir a) de b) es la clave del problema: en a) el espacio se reduce a los hombres; en b) no.

c) $p(M \cup F)$ — probabilidad de la unión

Aplicamos la fórmula de la unión (hay que restar la intersección para no contar dos veces a las mujeres favorables):

$$p(M \cup F) = p(M) + p(F) - p(M \cap F) = \frac{120}{200} + \frac{90}{200} - \frac{40+\delta}{200}$$

$$= \frac{120+90-40-\delta}{200} = \boxed{\frac{170-\delta}{200}}$$

d) Valor de δ para que M y $\bar{F}$ sean independientes

Dos sucesos son independientes si y solo si $p(M \cap \bar{F}) = p(M) \cdot p(\bar{F})$. Identificamos cada término en la tabla:

$$p(M \cap \bar{F}) = \frac{80-\delta}{200} \qquad p(M) = \frac{120}{200} = 0,6 \qquad p(\bar{F}) = \frac{110}{200} = 0,55$$

Imponemos la condición:

$$\frac{80-\delta}{200} = 0,6 \cdot 0,55 = 0,33$$

$$80 - \delta = 0,33 \cdot 200 = 66 \implies \boxed{\delta = 14}$$

Comprobación. Con $\delta = 14$ la tabla queda:

	Hombres	Mujeres	Total
Positivas	36	54	90
Negativas	44	66	110
Total	80	120	200

$$p(M \cap \bar{F}) = \frac{66}{200} = 0,33 = 0,6 \cdot 0,55 = p(M) \cdot p(\bar{F}) \checkmark$$

Los totales se mantienen (36+54 = 90 y 44+66 = 110), y todas las frecuencias son positivas, luego el valor $\delta = 14$ es válido.

SOLUCIONARIO RÁPIDO – PARTE TEST

Pregunta	Respuesta	Clave
1	a)	$\vec{d} = (-3, 2, 1)$ es proporcional a $\vec{n}_\pi$: recta $\perp$ plano
2	b)	Idempotente + regular $\Rightarrow A = I$; $\det(A)$ puede ser 0
3	a)	$d = \sqrt{5} \approx 2,24$
4	c)	$p(A \cap B) \geq 0,3$: ni disjuntos ni unión necesariamente total
5	c)	El límite existe y vale 0 (gana la potencia al logaritmo)
6	b)	$f(a)f(b) > 0$ no es la hipótesis de Bolzano: no garantiza nada
7	a)	$p = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{36} \approx 0,139$
8	c)	Contraejemplos: a, b, c son arbitrarios; $\det(A) = ac$
9	b)	$f = \cosh x$: mínimo en $x = 0$, decreciente antes
10	a)	Trasponer e invertir conmutan; $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$
11	b)	Se cruzan; $d = 1/\sqrt{43} = \sqrt{43}/43$
12	b)	$p(\text{naranja}) = 0,25$ y $N = 60 \cdot 0,25 = 15$
13	b)	$\lambda = -\sqrt{3}/2$: hay que imponer columnas *ortogonales*
14	a)	$\lvert B \rvert = 35$ y $p = 10/35 \approx 0,286$
15	b)	Teorema del Valor Medio de Lagrange

La penalización de este examen cambia la estrategia. Aquí cada fallo resta solo **0,1** puntos (frente a los 0,25 de Matemáticas CCSS) y cada acierto suma 0,5. Respondiendo *completamente al azar* entre tres opciones, el valor esperado es

$$\frac{1}{3}(0,5) - \frac{2}{3}(0,1) = 0,1\overline{6} - 0,0\overline{6} = +0,1 \text{ puntos}$$

Es decir, **positivo**. Con esta penalización tan suave, dejar preguntas en blanco es matemáticamente peor que arriesgar. Conviene contestar las 10 preguntas, empezando por las que se dominen.

El patrón de las trampas. Muchas cuestiones se juegan en la *cuantificación* del enunciado: "toda matriz", "necesariamente", "no necesariamente". Basta **un contraejemplo** para tumbar una afirmación universal (preguntas 2, 4, 6 y 8), y en varias de ellas el contraejemplo es el caso degenerado: la matriz nula, la función constante, el caso det = 0. Antes de calcular, conviene preguntarse si el enunciado afirma algo *siempre* o solo *a veces*.