FÍSICA

PRUEBA DE COMPETENCIA ESPECÍFICA (PCE)
UNEDASISS — 2023

EXAMEN RESUELTO

Reparto de la nota. Primera parte: 15 preguntas objetivas de las que se responden **10**; cada acierto suma **0,5** puntos, cada error resta **0,15** y las preguntas en blanco no computan (**5 puntos**). Segunda parte: 4 problemas de los que se resuelven **2**, a 2,5 puntos cada uno, con todos los apartados del mismo valor (**5 puntos**). En los problemas se valora el planteamiento, el desarrollo paso a paso, el resultado y el uso correcto de unidades y vectores; un resultado sin justificar no puntúa. Este documento resuelve los cuatro problemas, aunque en el examen solo hay que hacer dos.

PRIMERA PARTE: PREGUNTAS OBJETIVAS

1. Sean dos cuerpos puntuales A y B, de masas $m_A = M$ y $m_B = 2M$. El cuerpo A se coloca y se fija en el punto $(0, 0)$, mientras que el cuerpo B se coloca y se fija en el punto de coordenadas $(20, 0)$. Un tercer cuerpo C de masa mucho más pequeña se deja libremente en la posición de coordenadas $(8, 0)$. La intensidad de campo gravitatorio $\vec{g}$ que siente el cuerpo C debido a su interacción con los cuerpos A y B,

a) Irá dirigida en la dirección del eje x, en sentido negativo.

b) Irá dirigida en la dirección del eje x, en sentido positivo.

c) Será un vector nulo.

Solución.

Respuesta: a)

Cada masa atrae a C hacia sí. A está a 8 unidades (a la izquierda) y B a 12 unidades (a la derecha):

$$g_A = \frac{GM}{8^2} = \frac{GM}{64} \text{ (hacia } -x), \qquad g_B = \frac{G\,2M}{12^2} = \frac{GM}{72} \text{ (hacia } +x).$$

Como $\frac{1}{64} > \frac{1}{72}$, domina la atracción de A y el campo total apunta hacia $-x$: $\vec{g} = GM\left(\frac{1}{72} - \frac{1}{64}\right)\vec{i}$, con componente negativa.

Matiz que conviene conocer: el punto de campo nulo no está lejos. Igualando $\frac{M}{x^2} = \frac{2M}{(20-x)^2}$ sale $x = \frac{20}{1+\sqrt{2}} \approx 8{,}28$. C está justo a la izquierda de ese punto, más cerca de A, y por eso gana A. La opción c) es la trampa para quien "intuye" que el punto está equilibrado.

2. Sea un cuerpo bajo la influencia gravitatoria de un planeta. Tomando la referencia habitual para la energía potencial gravitatoria, que tiene valor nulo en el infinito, se cumple que:

a) La energía potencial gravitatoria siempre es negativa, mientras que la energía mecánica puede tomar cualquier signo.

b) Tanto la energía potencial gravitatoria como la energía mecánica pueden tomar cualquier signo.

c) Tanto la energía potencial gravitatoria como la energía mecánica son siempre negativas.

Solución.

Respuesta: a)

Con origen en el infinito, $E_p = -\dfrac{GMm}{r} < 0$ para cualquier r finito. La energía mecánica $E_m = E_c + E_p$ depende de la velocidad:

- $E_m < 0$: el cuerpo está ligado (órbita cerrada).

- $E_m = 0$: tiene justo la velocidad de escape.
- $E_m > 0$: escapa con velocidad sobrante.

c) solo es cierta para cuerpos ligados, como un satélite en órbita, y por eso es el distractor más frecuente.

3. Consideremos las órbitas de los planetas Tierra y Júpiter alrededor del Sol como órbitas circulares. Sabiendo que Júpiter se encuentra unas 9,5 veces más lejos del Sol que la Tierra, se cumple que:

a) La velocidad orbital de la Tierra es menor y su período es mayor.

b) La velocidad orbital de la Tierra es mayor y su período es menor.

c) Tanto la velocidad orbital como el período de la Tierra son menores que los de Júpiter.

Solución.

Respuesta: b)

Igualando la fuerza gravitatoria a la centrípeta: $v = \sqrt{\dfrac{GM_S}{r}}$, y por la tercera ley de Kepler $T^2 \propto r^3$. A menor radio, **más velocidad y menos período**. Con los datos: $v_T/v_J = \sqrt{9{,}5} \approx 3{,}1$ y $T_J/T_T = 9{,}5^{3/2} \approx 29$ (Júpiter tarda unos 12 años; la cifra exacta difiere porque 9,5 es aproximado).

Regla: velocidad y período siempre van en sentido contrario al variar el radio, así que c) es imposible.

4. Un cuerpo bajo los efectos de un campo gravitatorio se mueve desde un punto A hasta otro punto B. El trabajo realizado por el campo gravitatorio cuando el cuerpo se mueve de A a B

a) Es mayor si se traslada más despacio.

b) Es independiente de lo rápido que el cuerpo se traslade del punto A al punto B.

c) Es mayor si se traslada más rápido.

Solución.

Respuesta: b)

El campo gravitatorio es **conservativo**: el trabajo que realiza solo depende de las posiciones inicial y final, $W_{A\to B} = -\Delta E_p = E_p(A) - E_p(B)$. No depende de la trayectoria ni de la rapidez con que se recorra.

5. Dos partículas A y B están cargadas con el mismo signo y a una distancia r. La carga de la partícula A es el doble que la de la partícula B, es decir, $q_A = 2q_B$. Se verifica que

a) El módulo de la fuerza que la partícula A ejerce sobre la partícula B es el mismo que el módulo de la fuerza que ejerce la partícula B sobre la partícula A.

b) El módulo de la fuerza que la partícula A ejerce sobre la partícula B es la mitad que el módulo de la fuerza que ejerce la partícula B sobre la partícula A.

c) El módulo de la fuerza que la partícula A ejerce sobre la partícula B es el doble que el módulo de la fuerza que ejerce la partícula B sobre la partícula A.

Solución.

Respuesta: a)

Por la ley de Coulomb, $F = k\dfrac{|q_A q_B|}{r^2}$: la expresión es simétrica en las dos cargas. Además, por la **tercera ley de Newton** (acción y reacción), las dos fuerzas tienen igual módulo y sentidos opuestos. Que una carga sea el doble cambia el *campo* que crea cada una, no la fuerza mutua.

6. El campo magnético generado en el centro de una espira circular por una corriente que circula por ella

a) Es un vector normal al plano que contiene a la espira.

b) Es un vector cuyo sentido es independiente del sentido de la corriente que pasa por la espira circular.

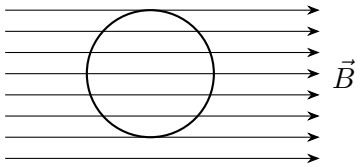
c) Es un vector paralelo al plano que contiene a la espira.

Solución.

Respuesta: a)

En el centro, $B = \dfrac{\mu_0 I}{2R}$ y su dirección es **perpendicular al plano de la espira**. El sentido lo da la **regla de la mano derecha**: si los dedos siguen la corriente, el pulgar indica $\vec{B}$. Por eso b) es falsa: al invertir la corriente se invierte el campo.

7. Se coloca una espira circular en el seno de un campo magnético orientado como indica la figura, cuya magnitud va disminuyendo con el tiempo. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?



a) La corriente inducida en la espira tiene sentido horario.

b) La corriente inducida en la espira tiene sentido antihorario.

c) No se induce ninguna corriente en la espira.

Solución.

Respuesta: c)

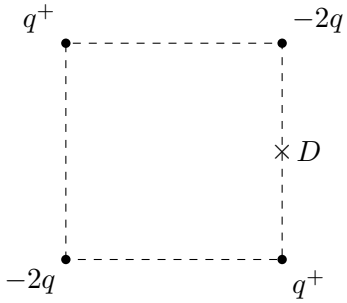
La espira está dibujada en el plano del papel y las líneas de campo también están en ese plano: $\vec{B}$ es **paralelo al plano de la espira**. El flujo es

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = B\,S\cos 90^\circ = 0,$$

y sigue siendo cero aunque B disminuya. Si el flujo no varía, por la ley de Faraday ($\varepsilon = -\dfrac{d\Phi}{dt}$) no hay fuerza electromotriz ni corriente inducida.

Aquí está la trampa: el enunciado insiste en que el campo "va disminuyendo" para que se aplique la ley de Lenz sin mirar la orientación. Lo primero siempre es comprobar si hay flujo: solo las líneas que *atraviesan* la superficie cuentan.

8. Cuatro partículas, dos cargadas positivamente con carga q y dos cargadas negativamente con carga $-2q$ se disponen en los vértices de un cuadrado como se muestra en la figura. Se verifica que, en el punto D, que se encuentra en el centro de uno de los lados del cuadrado y que está indicado en la figura,



a) El campo eléctrico tiene su componente vertical hacia abajo.

b) El campo eléctrico tiene su componente vertical hacia arriba.

c) El campo eléctrico tiene una componente vertical nula.

Solución.

Respuesta: b)

Tomamos el lado del cuadrado igual a $2a$, de modo que D está a distancia a de los dos vértices de su lado y a $\sqrt{5}\,a$ de los otros dos.

Las dos cargas del lado derecho, que son las que mandan por estar más cerca:

- $-2q$ (arriba): atrae hacia ella, **hacia arriba**, con $E = \dfrac{2kq}{a^2}$.
- $+q$ (abajo): repele, también **hacia arriba**, con $E = \dfrac{kq}{a^2}$.

Juntas dan $\dfrac{3kq}{a^2}$ hacia arriba.

Las dos del lado izquierdo están a $\sqrt{5}\,a$ y su campo forma un ángulo con la horizontal de seno $1/\sqrt{5}$. La $+q$ (arriba) empuja hacia abajo y la $-2q$ (abajo) atrae hacia abajo; sus componentes verticales suman

$$\frac{kq}{5a^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{2kq}{5a^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{3kq}{5\sqrt{5}\,a^2} \approx 0{,}27\,\frac{kq}{a^2} \text{ hacia abajo.}$$

Componente vertical total: $\dfrac{3kq}{a^2}(1-0{,}089) \approx 2{,}73\,\dfrac{kq}{a^2}$, **hacia arriba**.

Cómo resolverla rápido en el examen: las dos cargas cercanas empujan hacia arriba y las lejanas están más de dos veces más lejos (su efecto se divide por más de 5). No hace falta calcular para ver que gana el sentido hacia arriba.

9. El índice de refracción de un vidrio para la luz azul ($\lambda = 486$ nm) es de 1,75 y para la luz roja ($\lambda = 656$ nm) es de 1,67. Un rayo de luz blanca incide sobre una lámina de este vidrio con un ángulo diferente de $90°$ a la superficie de la lámina. ¿Cuál de las siguientes respuestas es correcta?

a) La componente azul de la luz se refractará con un ángulo mayor que la componente roja de la luz.

b) Ambas componentes se desviarán igual.

c) La componente azul de la luz se refractará con un ángulo menor que la componente roja de la luz.

Solución.

Respuesta: c)

Por la ley de Snell desde el aire, $\sin\theta_r = \dfrac{\sin\theta_i}{n}$. A mayor índice, menor ángulo de refracción. Como $n_{\text{azul}} = 1{,}75 > n_{\text{rojo}} = 1{,}67$, el azul se refracta con un **ángulo menor**: se acerca más a la normal. Es el fenómeno de la **dispersión**, el mismo del prisma.

Cuidado con el vocabulario: el azul se refracta con un ángulo *menor*, pero se *desvía más* respecto de la dirección incidente. Si la pregunta hablase de desviación, la respuesta cambiaría de sentido. La b) solo valdría con incidencia normal, que el enunciado excluye.

10. Sea una lente delgada divergente de distancia focal 20 cm. Se coloca un objeto a una distancia de 30 cm de la lente. Su imagen

a) Es virtual y derecha.

b) Es real y derecha.

c) Es real e invertida.

Solución.

Respuesta: a)

Con el convenio de signos habitual ($s = -30$ cm, $f' = -20$ cm por ser divergente):

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'} \;\Rightarrow\; \frac{1}{s'} = -\frac{1}{20} - \frac{1}{30} = -\frac{1}{12} \;\Rightarrow\; s' = -12 \text{ cm}.$$

$s' < 0$: la imagen está del mismo lado que el objeto, es **virtual**. Aumento: $\beta = \dfrac{s'}{s} = \dfrac{-12}{-30} = 0{,}4 > 0$: **derecha** y menor.

Regla: una lente divergente con un objeto real siempre da imagen virtual, derecha y menor, esté donde esté el objeto. Los datos numéricos no hacen falta para contestar.

11. Un haz de luz que viaja por el medio 1 incide en la superficie de separación con el medio 2. Para que se pueda dar el fenómeno de reflexión total, es necesario que

a) El índice de refracción de los medios 1 y 2 sean iguales.

b) El índice de refracción del medio 1 sea mayor que el índice de refracción del medio 2.

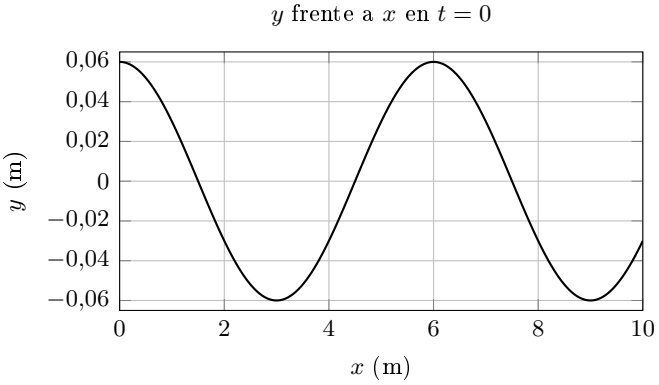
c) El índice de refracción del medio 1 sea menor que el índice de refracción del medio 2.

Solución.

Respuesta: b)

La reflexión total exige que la luz pase a un medio **menos refringente**, porque entonces el rayo refractado se aleja de la normal y, a partir del ángulo límite $\sin\theta_L = \dfrac{n_2}{n_1}$, ya no hay refracción. Esa expresión solo tiene sentido si $n_2 < n_1$. Es el principio de la fibra óptica.

12. En la figura se muestra la gráfica de la posición de los puntos de una onda en el instante $t = 0$. Con esta gráfica



a) Se puede deducir la longitud de onda, pero no el período de la onda.

b) Se puede deducir el período de la onda, pero no la longitud de onda.

c) Se pueden deducir tanto el período como la longitud de onda.

Solución.

Respuesta: a)

La gráfica representa y frente a x en un instante fijo: es una "foto" de la onda. En ella se lee la periodicidad **espacial**: la distancia entre dos máximos consecutivos (por ejemplo, entre $x = 0$ y $x = 6$ m) es $\lambda = 6$ m, y la amplitud es 0,06 m. Para el período, que es la periodicidad **temporal**, haría falta la gráfica $y(t)$ de un punto o conocer la velocidad de propagación.

Regla: eje horizontal $x \rightarrow$ longitud de onda; eje horizontal $t \rightarrow$ período.

13. La actividad de un material radiactivo

a) Aumenta con el tiempo.

b) Es directamente proporcional a la constante de desintegración.

c) Es directamente proporcional al tiempo de semidesintegración.

Solución.

Respuesta: b)

La actividad es el número de desintegraciones por unidad de tiempo: $A = \lambda N$, con λ la constante de desintegración. Para un número dado de núcleos, es directamente proporcional a λ.

- **a)** es falsa: $A(t) = A_0\, e^{-\lambda t}$ **disminuye** con el tiempo.
- **c)** es lo contrario: $T_{1/2} = \dfrac{\ln 2}{\lambda}$, así que la actividad es **inversamente** proporcional al período de semidesintegración. Un isótopo de vida corta es muy activo.

14. Un foco de luz se mueve por el espacio a velocidad constante. Un observador también se mueve por el espacio a velocidad constante, pero diferente de la del foco. El observador mide la velocidad de la luz. El resultado obtenido, ¿depende de la velocidad relativa entre el foco y el observador?

a) Sí, es lo que se llama efecto Doppler relativista.

b) No.

c) Sí, depende de la velocidad relativa entre ambos. De ahí el nombre de la teoría.

Solución.

Respuesta: b)

Es el **segundo postulado de la relatividad especial** de Einstein: la velocidad de la luz en el vacío es la misma, c, para todos los observadores inerciales, sea cual sea el movimiento del foco o del observador.

- **a)** El efecto Doppler relativista existe, pero cambia la **frecuencia** (y la longitud de onda) de la luz, no su velocidad.
- **c)** juega con el nombre "relatividad": lo relativo son el tiempo y las longitudes; la velocidad de la luz es precisamente lo absoluto.

15. Un núcleo de uranio-238, $^{238}_{92}\mathrm{U}$, se desintegra emitiendo un núcleo alfa. ¿Cuál es el número de protones (número atómico Z) y neutrones (N) del núcleo resultante de dicha desintegración?

a) $N = 236$, $Z = 92$

b) $N = 142$, $Z = 94$

c) $N = 144$, $Z = 92$

Solución.

Respuesta: ninguna de las tres es correcta tal como está escrita. La más próxima es c).

Una partícula alfa es un núcleo de helio, $^{4}_{2}\mathrm{He}$: se pierden 2 protones y 2 neutrones.

$$^{238}_{92}\mathrm{U} \longrightarrow {}^{234}_{90}\mathrm{Th} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}.$$

El núcleo resultante es torio-234: $Z = 90$ y $N = 234 - 90 = 144$.

Aviso sobre el enunciado. La opción c) acierta los neutrones ($N = 144$) pero da $Z = 92$, que es el del uranio de partida. Probablemente es una errata en la transcripción o en el original, y la respuesta pretendida es c). Las otras dos son claramente falsas: a) confunde número másico y número de neutrones, y b) sube el número atómico, como si fuera una desintegración beta.

Estrategia: como solo se contestan 10 de las 15 preguntas, lo más sensato en el examen es **dejar esta en blanco** y elegir otra.

SEGUNDA PARTE: PROBLEMAS

PROBLEMA 1. El peso de una astronauta de masa 60 kg en la superficie de un planeta es de 800 N. Si el radio del planeta es $R_p = 5000$ km,

a) Determinar la masa del planeta.

b) Determinar a qué altura sobre la superficie del planeta la aceleración de la gravedad es igual a la que hay sobre la superficie terrestre.

c) Determinar qué energía hay que dar a un satélite de 400 kg para que cambie de una órbita circular a 2000 km de altura sobre la superficie del planeta a otra órbita, también circular, de 3000 km de altura.

Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2} (constante de gravitación universal); $g = 9{,}8$ m s^{-2} (gravedad en la superficie terrestre).

Solución.

a) Masa del planeta.

La gravedad en la superficie del planeta se obtiene del peso:

$$g_p = \frac{P}{m} = \frac{800 \text{ N}}{60 \text{ kg}} = 13{,}33 \text{ m s}^{-2}.$$

Como $g_p = \dfrac{GM_p}{R_p^2}$, con $R_p = 5 \cdot 10^6$ m:

$$M_p = \frac{g_p R_p^2}{G} = \frac{13{,}33 \cdot (5 \cdot 10^6)^2}{6{,}67 \cdot 10^{-11}} \approx \mathbf{5{,}0 \cdot 10^{24}} \textbf{ kg}.$$

b) Altura a la que $g = 9{,}8$ m s^{-2}.

A una distancia $r = R_p + h$ del centro, $g(r) = \dfrac{GM_p}{r^2}$. Dividiendo entre el valor en la superficie:

$$\frac{g(r)}{g_p} = \frac{R_p^2}{r^2} \;\Rightarrow\; r = R_p\sqrt{\frac{g_p}{g}} = 5 \cdot 10^6 \sqrt{\frac{13{,}33}{9{,}8}} = 5 \cdot 10^6 \cdot 1{,}166 = 5{,}83 \cdot 10^6 \text{ m}.$$

$$h = r - R_p \approx 8{,}3 \cdot 10^5 \text{ m} = \textbf{832 km}.$$

Comprobación de sentido: el planeta tiene más gravedad en superficie que la Tierra, así que hay que alejarse para que baje hasta 9,8. Un resultado de h negativo indicaría un error.

c) Energía para cambiar de órbita.

En una órbita circular de radio r, la energía mecánica es la mitad de la potencial:

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}\frac{GM_p m}{r} - \frac{GM_p m}{r} = -\frac{GM_p m}{2r}.$$

Radios de las órbitas (hay que sumar el radio del planeta a las alturas): $r_1 = 5000 + 2000 = 7000$ km $= 7 \cdot 10^6$ m y $r_2 = 8 \cdot 10^6$ m. Con $GM_p = g_p R_p^2 = 13{,}33 \cdot (5 \cdot 10^6)^2 = 3{,}33 \cdot 10^{14}$ m^3 s^{-2}:

$$\Delta E = E_{m,2} - E_{m,1} = \frac{GM_p m}{2}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = \frac{3{,}33 \cdot 10^{14} \cdot 400}{2}\left(\frac{1}{7 \cdot 10^6} - \frac{1}{8 \cdot 10^6}\right)$$

$$\Delta E \approx \mathbf{1{,}19 \cdot 10^9} \textbf{ J}.$$

Es positiva: hay que **aportar** energía para subir a una órbita más alta.

Errores frecuentes que conviene evitar: usar las alturas (2000 y 3000 km) como radios; usar solo la energía potencial en lugar de la mecánica, lo que da el doble del resultado correcto; y no pasar los kilómetros a metros.

PROBLEMA 2. Un electrón que tiene una energía cinética $E_c = 10^{-18}$ J que viaja en la dirección positiva del eje x penetra en una región en la que hay un campo magnético uniforme de $1{,}2 \cdot 10^{-3}$ T en la dirección positiva del eje z, es decir, $\vec{B} = 1{,}2 \cdot 10^{-3}\,\vec{k}$ T, siendo $\vec{k}$ el vector unitario en la dirección positiva del eje z. Determinar

a) El módulo de la fuerza que el campo magnético ejerce sobre el electrón.

b) El radio de la trayectoria que describe el electrón.

c) Justificar en qué sentido se mueve el electrón a lo largo de su trayectoria y mostrarlo. Para ello, hacer un esquema en el que se dibujen con claridad la dirección del campo magnético, la trayectoria del electrón y el sentido en el que este la describe.

Datos: $m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ kg (masa del electrón); $e = -1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C (carga del electrón).

Solución.

a) Módulo de la fuerza magnética.

Primero, la velocidad a partir de la energía cinética:

$$v = \sqrt{\frac{2E_c}{m_e}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-18}}{9{,}11 \cdot 10^{-31}}} = 1{,}48 \cdot 10^6 \text{ m/s}.$$

La fuerza de Lorentz es $\vec{F} = q\,\vec{v} \times \vec{B}$. Como $\vec{v}$ (eje x) y $\vec{B}$ (eje z) son perpendiculares, $\sin 90° = 1$:

$$F = |q|\,v\,B = 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 1{,}48 \cdot 10^6 \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-3} \approx \mathbf{2{,}84 \cdot 10^{-16}\ N}.$$

b) Radio de la trayectoria.

La fuerza magnética es siempre perpendicular a la velocidad: no cambia el módulo de v, solo su dirección, y el electrón describe un **movimiento circular uniforme**. La fuerza magnética actúa como fuerza centrípeta:

$$|q|\,v\,B = \frac{m_e v^2}{r} \;\Rightarrow\; r = \frac{m_e v}{|q|\,B} = \frac{9{,}11 \cdot 10^{-31} \cdot 1{,}48 \cdot 10^6}{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-3}} \approx \mathbf{7{,}0 \cdot 10^{-3}\ m = 7{,}0\ mm}.$$

c) Sentido del movimiento.

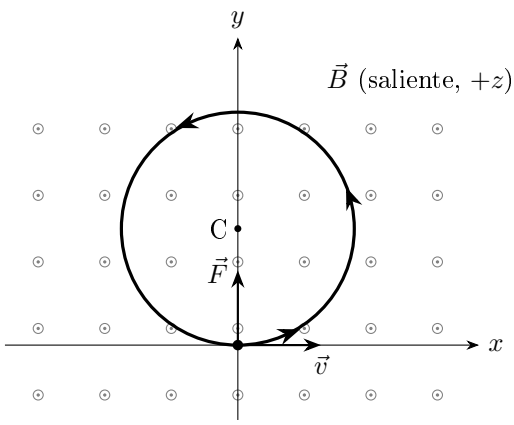
Calculamos la dirección de la fuerza en el instante en que el electrón entra en el campo, con $\vec{v} = v\,\vec{i}$ y $\vec{B} = B\,\vec{k}$:

$$\vec{v} \times \vec{B} = vB\,(\vec{i} \times \vec{k}) = -vB\,\vec{j}.$$

Como la carga del electrón es **negativa**, la fuerza tiene el sentido contrario:

$$\vec{F} = q\,(\vec{v} \times \vec{B}) = (-|q|)(-vB\,\vec{j}) = +|q|vB\,\vec{j}.$$

Al entrar, la fuerza apunta hacia $+y$: el centro de la circunferencia está en el semieje y positivo, a 7 mm del punto de entrada. El electrón se mueve hacia $+x$ y se curva hacia $+y$: visto desde el semieje z positivo (con $\vec{B}$ saliendo del papel), recorre la circunferencia en **sentido antihorario**.



El error que más se repite: olvidar el signo negativo del electrón. Con una carga positiva, la fuerza inicial apuntaría a $-y$ y el giro sería horario. El enunciado pide "justificar": hay que escribir el producto vectorial y comentar el signo de la carga, no solo dibujar.

PROBLEMA 3. Por una cuerda que se extiende a lo largo del eje X, se propaga una onda de amplitud $A = 1$ cm, frecuencia $f = 100$ Hz y longitud de onda $\lambda = 1{,}5$ m en el sentido positivo del eje X.

a) Determinar cuál es la ecuación de esta onda si sabemos que cuando $t = 0$ s la posición vertical del punto de la cuerda que se encuentra en $x = 0{,}5$ m es $y = 0{,}5$ cm.

b) Cuando $t = 2$ s, ¿cuál es la diferencia de altura entre los puntos situados en $x = 0{,}3$ m y en $x = 0{,}5$ m?

c) Cuando $t = 1$ s, ¿cuál es la diferencia de fase entre los puntos en $x = 0{,}5$ m y en $x = 1{,}25$ m?

Solución.

Magnitudes de la onda.

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{1{,}5} = \frac{4\pi}{3}\ \text{rad/m}, \qquad \omega = 2\pi f = 200\pi\ \text{rad/s}, \qquad A = 0{,}01\ \text{m}.$$

a) Ecuación de la onda.

Para una onda que avanza en el sentido positivo del eje X:

$$y(x,t) = A\sin(\omega t - kx + \varphi_0) = 0{,}01\sin\left(200\pi t - \frac{4\pi}{3}x + \varphi_0\right)\ \text{(m)}.$$

Imponemos la condición $y(0{,}5;\,0) = 0{,}005$ m:

$$0{,}01\sin\left(\varphi_0 - \frac{2\pi}{3}\right) = 0{,}005 \ \Rightarrow\ \sin\left(\varphi_0 - \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}.$$

Esta ecuación tiene dos soluciones: $\varphi_0 - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$ o bien $\frac{5\pi}{6}$. Corresponden a que el punto esté *subiendo* o *bajando* al pasar por $y = 0{,}5$ cm, y el enunciado no da ese dato. Tomamos la primera (el punto sube, porque la velocidad $A\omega\cos\frac{\pi}{6}$ es positiva):

$$\varphi_0 = \frac{5\pi}{6} \ \Rightarrow\ \boxed{y(x,t) = 0{,}01\sin\left(200\pi t - \frac{4\pi}{3}x + \frac{5\pi}{6}\right)\ \text{(m)}}$$

Para la nota máxima: conviene indicar que existe la segunda solución, $\varphi_0 = \frac{3\pi}{2}$, y por qué se elige una. Demuestra que se entiende el problema y blinda el apartado ante cualquier criterio del corrector.

b) Diferencia de altura en $t = 2$ s.

En $t = 2$ s, $\omega t = 400\pi$, que es un múltiplo de 2π: la cuerda tiene exactamente la misma forma que en $t = 0$ (han pasado 200 períodos completos). Entonces:

$$y(0{,}5;\,2) = 0{,}01\sin\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{2\pi}{3}\right) = 0{,}01\sin\frac{\pi}{6} = 0{,}005\ \text{m},$$

$$y(0{,}3;\,2) = 0{,}01\sin\left(\frac{5\pi}{6} - 0{,}4\pi\right) = 0{,}01\sin(78^\circ) = 0{,}00978\ \text{m}.$$

$$\Delta y = y(0{,}3) - y(0{,}5) \approx \mathbf{4{,}8\cdot 10^{-3}\ m \approx 0{,}48\ cm}.$$

El punto $x = 0{,}3$ m está unos 0,48 cm por encima del punto $x = 0{,}5$ m.

Con la otra fase ($\varphi_0 = \frac{3\pi}{2}$) se obtiene $y(0{,}3) = -0{,}0031$ m y $\Delta y \approx -0{,}81$ cm. Si se elige esa solución en a), este es el resultado coherente y también es correcto.

c) Diferencia de fase en $t = 1$ s.

La diferencia de fase entre dos puntos en el mismo instante no depende de t ni de φ_0:

$$\Delta\varphi = k\,\Delta x = \frac{4\pi}{3}(1{,}25 - 0{,}5) = \frac{4\pi}{3}\cdot 0{,}75 = \pi\ \mathbf{rad}.$$

Los dos puntos están separados media longitud de onda (0,75 m $= \lambda/2$): vibran en **oposición de fase**. Cuando uno está arriba, el otro está abajo.

PROBLEMA 4. La fórmula de Rydberg permite calcular las longitudes de emisión del espectro del hidrógeno y viene dada por

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

donde R_H es la constante de Rydberg y n y m son los niveles involucrados en la emisión. La serie de Lyman es el conjunto de líneas del espectro del hidrógeno que este emite cuando los electrones pasan de cualquier nivel $n \geq 2$ al nivel $m = 1$.

a) ¿Cuál es la máxima frecuencia posible de la serie de Lyman?

b) ¿Cuál es la mínima frecuencia posible de la serie de Lyman?

c) La energía de un fotón de una de las líneas de la serie de Lyman es de 13,09 eV. ¿Entre qué niveles de energía ha sido la transición que ha emitido este fotón?

Datos: $R_H = 1{,}097 \cdot 10^7$ m^{-1}; $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ J s; $e = -1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C; $c = 3 \cdot 10^8$ m/s.

Solución.

Relación entre frecuencia y fórmula de Rydberg. Como $f = c/\lambda$, para la serie de Lyman ($m = 1$):

$$f = c\, R_H \left(1 - \frac{1}{n^2} \right), \qquad n = 2, 3, 4, \ldots$$

con $c\, R_H = 3 \cdot 10^8 \cdot 1{,}097 \cdot 10^7 = 3{,}291 \cdot 10^{15}$ Hz. La frecuencia crece con n.

a) Frecuencia máxima.

Corresponde a la transición desde el nivel más alto posible, $n \to \infty$ (el límite de la serie, desde la ionización):

$$f_{\text{máx}} = c\, R_H = \mathbf{3{,}29 \cdot 10^{15}\ Hz} \qquad (\lambda = 91{,}2 \text{ nm}).$$

b) Frecuencia mínima.

Corresponde a la transición con el menor salto, de $n = 2$ a $m = 1$:

$$f_{\text{mín}} = c\, R_H \left(1 - \frac{1}{4} \right) = 0{,}75 \cdot 3{,}291 \cdot 10^{15} = \mathbf{2{,}47 \cdot 10^{15}\ Hz} \qquad (\lambda = 121{,}5 \text{ nm}).$$

Toda la serie de Lyman está en el **ultravioleta**.

c) Transición del fotón de 13,09 eV.

Pasamos la energía a julios: $E = 13{,}09 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} = 2{,}094 \cdot 10^{-18}$ J. Como $E = hf = \dfrac{hc}{\lambda}$:

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{E}{hc} = \frac{2{,}094 \cdot 10^{-18}}{6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8} = 1{,}053 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}.$$

Sustituyendo en la fórmula de Rydberg con $m = 1$:

$$1 - \frac{1}{n^2} = \frac{1{,}053 \cdot 10^7}{1{,}097 \cdot 10^7} = 0{,}960 \ \Rightarrow\ \frac{1}{n^2} = 0{,}040 \ \Rightarrow\ n^2 \approx 25 \ \Rightarrow\ n = 5.$$

La transición es del **nivel** $n = 5$ **al nivel** $m = 1$.

Comprobación: $E = hcR_H \left(1 - \frac{1}{25}\right) = 2{,}095 \cdot 10^{-18}$ J = 13,09 eV. Coincide.

Un matiz que conviene conocer: el valor de n^2 sale 24,9 y no 25 exacto por el redondeo de las constantes. Como n tiene que ser entero, se redondea, pero conviene decirlo en el examen.

SOLUCIONARIO RÁPIDO

Pregunta	Respuesta	Clave
1	a)	A está más cerca: $GM/64 > GM/72$. El punto nulo está en $x \approx 8{,}28$
2	a)	$E_p < 0$ siempre; E_m depende de si el cuerpo está ligado
3	b)	Menor radio: más velocidad y menos período
4	b)	Campo conservativo: el trabajo solo depende de A y B
5	a)	Acción y reacción: fuerzas iguales y opuestas
6	a)	$\vec{B}$ perpendicular a la espira, sentido por la mano derecha
7	c)	$\vec{B}$ paralelo a la espira: flujo nulo, no hay inducción
8	b)	Las dos cargas cercanas empujan hacia arriba
9	c)	Mayor índice, menor ángulo de refracción
10	a)	Divergente: imagen siempre virtual, derecha y menor ($s' = -12$ cm)
11	b)	Reflexión total solo hacia un medio de menor índice
12	a)	Gráfica $y(x)$: da $\lambda = 6$ m, no el período
13	b)	$A = \lambda N$
14	b)	c es igual para todos los observadores inerciales
15	—	Errata: el resultado es Th-234 ($Z = 90$, $N = 144$). La más próxima es c)
Problemas		
P1		$M_p = 5{,}0 \cdot 10^{24}$ kg; $h = 832$ km; $\Delta E = 1{,}19 \cdot 10^{9}$ J
P2		$F = 2{,}84 \cdot 10^{-16}$ N; $r = 7{,}0$ mm; giro antihorario visto desde $+z$
P3		$y = 0{,}01 \sin(200\pi t - \frac{4\pi}{3}x + \frac{5\pi}{6})$; $\Delta y = 0{,}48$ cm; $\Delta\varphi = \pi$ rad
P4		$f_{\text{máx}} = 3{,}29 \cdot 10^{15}$ Hz; $f_{\text{mín}} = 2{,}47 \cdot 10^{15}$ Hz; de $n = 5$ a $n = 1$

Nota de la primera parte con diez respuestas correctas: 5 puntos. Se contestan 10 de 15; cada acierto vale 0,5 y cada error resta 0,15.

Aviso de estrategia: con esta penalización, arriesgar compensa. Con tres opciones, el valor esperado de responder al azar es $\frac{1}{3} \cdot 0{,}5 - \frac{2}{3} \cdot 0{,}15 = +0{,}067$ puntos; si se descarta una opción, sube a $\frac{1}{2} \cdot 0{,}5 - \frac{1}{2} \cdot 0{,}15 = +0{,}175$. Conviene contestar las diez. Como sobran cinco preguntas, la 15 (con errata) es la primera candidata a quedarse fuera.

Preguntas con trampa conceptual. La 7 (flujo nulo aunque el campo varíe), la 9 (ángulo de refracción frente a desviación) y la 14 (Doppler cambia la frecuencia, no la velocidad de la luz) se fallan por responder con la fórmula antes de leer bien la situación. En la 1, el punto de equilibrio está muy cerca de la posición de C: hay que calcular, no intuir.

En los problemas, la nota está en el desarrollo. Cada apartado vale lo mismo (0,83 puntos) y un resultado sin justificar no puntúa. Hay que escribir la ecuación de partida, sustituir con unidades y comentar el resultado. Los fallos que más cuestan: confundir altura con radio orbital (P1), olvidar el signo del electrón (P2) y no mencionar la doble solución de la fase (P3).