MATEMÁTICAS CCSS

EXAMEN OFICIAL REALIZADO EN ESPAÑA EN LA CONVOCATORIA
PCE UNEDASISS 2023

EXAMEN RESUELTO

Debe responder a 8 de las 12 cuestiones. Cada pregunta acertada suma 0,5 puntos, cada fallo resta 0,25 puntos. No contestar ni suma ni resta.

1. Una matriz A es escalar si se cumple que:

a) Los elementos no pertenecientes a la diagonal principal son todos iguales a 1

b) Es diagonal y los elementos de la diagonal son todos distintos

c) Ninguna de las otras

Solución.

Respuesta: c)

Una matriz **escalar** es una matriz diagonal en la que *todos* los elementos de la diagonal principal son **iguales** entre sí. Es decir, es de la forma $\lambda \cdot I$:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

- a) es falsa: los elementos fuera de la diagonal deben ser **0**, no 1.
- b) es falsa: dice exactamente lo contrario de la definición (los de la diagonal deben ser iguales, no distintos).

Como ninguna de las dos es correcta, la respuesta es c).

2. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. El resultado de hacer $(3A+3B)^t$ es:

a) $\begin{pmatrix} 6 & -9 \\ -12 & 18 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 6 & -12 \\ -9 & 18 \end{pmatrix}$

c) Ninguna de las otras

Solución.

Respuesta: a)

Sacamos factor común (es más rápido que multiplicar cada matriz por 3 por separado):

$$3A + 3B = 3(A + B) = 3\left[\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\right] = 3\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -12 \\ -9 & 18 \end{pmatrix}$$

Ahora trasponemos (las filas pasan a ser columnas):

$$(3A + 3B)^t = \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ -12 & 18 \end{pmatrix}$$

Ojo con la trampa: la opción b) es el resultado **sin trasponer**. Si te olvidas del exponente t, marcas b) y pierdes la pregunta. Los elementos de la diagonal principal (6 y 18) no cambian al trasponer; solo se intercambian -12 y -9.

3. Dada la siguiente inecuaciones $3x-7+4x \geq 4x-6+2x$. Los puntos $x=-1$ y $x=0$ son:

a) Ambos valores son solución de la inecuación

b) Ninguno de los valores es solución de la inecuación

c) El valor $x=-1$ no es solución y el valor $x=0$ es solución de la inecuación.

Solución.

Respuesta: b)

Resolvemos la inecuación agrupando términos:

$$3x-7+4x \geq 4x-6+2x \implies 7x-7 \geq 6x-6 \implies 7x-6x \geq -6+7 \implies x \geq 1$$

La solución es $[1,+\infty)$. Ni $x=-1$ ni $x=0$ pertenecen a ese intervalo, luego ninguno de los dos es solución.

Método alternativo (más rápido): sustituir directamente.

- $x=-1$: $-3-7-4=-14$ y $-4-6-2=-12$. ¿$-14 \geq -12$? **No**.
- $x=0$: -7 y -6. ¿$-7 \geq -6$? **No**.

4. Dada la inecuación $-6x+8y-6 \geq 2$. Un punto solución es:

a) $(1,1)$

b) $(0,1)$

c) Ninguno de los anteriores

Solución.

Respuesta: b)

Simplificamos la inecuación: $-6x+8y \geq 8$, o dividiendo entre 2, $-3x+4y \geq 4$.

Sustituimos cada punto (recordando que el punto se escribe (x,y)):

- **a)** $(1,1)$: $-3(1)+4(1)=-3+4=1$. ¿$1 \geq 4$? **No**, no es solución.
- **b)** $(0,1)$: $-3(0)+4(1)=0+4=4$. ¿$4 \geq 4$? **Sí**, es solución.

El punto $(0,1)$ está justo *sobre* la recta frontera $-3x+4y=4$. Como la desigualdad es $\geq$ (no estricta), la frontera **sí** pertenece a la solución. Esa es la clave de la pregunta: si la desigualdad fuera $>$, la respuesta sería c).

5. La función $f(x)=\dfrac{7}{x-7}$ presenta una discontinuidad en el punto $x=7$

a) Inevitable de salto infinito

b) Discontinuidad evitable

c) Ninguna de las otras

Solución.

Respuesta: a)

En $x = 7$ el denominador se anula mientras el numerador vale 7 ($\neq 0$), luego no hay indeterminación que se pueda simplificar. Calculamos los límites laterales:

$$\lim_{x\to 7^-} \frac{7}{x-7} = \frac{7}{0^-} = -\infty \qquad \lim_{x\to 7^+} \frac{7}{x-7} = \frac{7}{0^+} = +\infty$$

Los límites laterales son infinitos (y distintos), luego se trata de una **discontinuidad inevitable de salto infinito**, con una asíntota vertical en $x = 7$.

Recuerda: sería *evitable* solo si el límite existiera y fuera finito (caso típico: $\frac{0}{0}$ que se simplifica), lo que aquí no ocurre.

6. Dada la función $f(x) = \dfrac{-3x}{\sqrt{x^3+27}}$ el dominio de la función es:

a) $(-3, \infty)$

b) $(3, \infty)$

c) Ninguna de las otras

Solución.

Respuesta: a)

La raíz está en el **denominador**, así que el radicando debe ser **estrictamente positivo** (no basta con ≥ 0, porque el denominador no puede anularse):

$$x^3 + 27 > 0 \implies x^3 > -27 \implies x > \sqrt[3]{-27} = -3$$

Por tanto, $\mathrm{Dom}(f) = (-3, +\infty)$.

Cuidado: al ser una raíz *cúbica* lo que hay dentro, no hay problema con los valores negativos de x^3 mientras la suma total sea positiva. Y ojo con confundir el 27 con el 3: $\sqrt[3]{27} = 3$, de ahí que la frontera sea -3 y no -27.

7. La función $f(x) = \dfrac{8x^2}{x-2}$ tiene un mínimo en el punto:

a) $x = 4$

b) $x = 0$

c) Ninguna de las otras

Solución.

Respuesta: a)

Derivamos con la regla del cociente:

$$f'(x) = \frac{16x(x-2) - 8x^2}{(x-2)^2} = \frac{16x^2 - 32x - 8x^2}{(x-2)^2} = \frac{8x^2 - 32x}{(x-2)^2} = \frac{8x(x-4)}{(x-2)^2}$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ o $x = 4$. ($x = 2$ no pertenece al dominio: es una asíntota vertical.)

Como $(x-2)^2 > 0$ siempre, el signo lo marca $8x(x-4)$:

Intervalo	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, 4)$	$(4, +\infty)$
Signo de f'	$+$	$-$	$-$	$+$
f	creciente	decreciente	decreciente	creciente

En $x = 4$ la función pasa de decreciente a creciente $\Rightarrow$ **mínimo relativo** en $x = 4$ (con $f(4) = \frac{8 \cdot 16}{2} = 64$). En $x = 0$ pasa de creciente a decreciente $\Rightarrow$ ahí hay un *máximo*, que es la trampa de la opción b).

8. Hallar $\int \left(-3x^{\frac{4}{5}} + 2\sqrt[5]{x^4}\right) dx$

a) $-5x^{\frac{9}{5}} + C$

b) $5x^{\frac{9}{5}} + C$

c) Ninguna de las otras

Solución.

Respuesta: c)

La clave está en darse cuenta de que los dos sumandos son **la misma potencia**:

$$\sqrt[5]{x^4} = x^{\frac{4}{5}}$$

Por tanto el integrando se simplifica:

$$-3x^{\frac{4}{5}} + 2x^{\frac{4}{5}} = -x^{\frac{4}{5}}$$

Integramos aplicando $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, con $n = \frac{4}{5}$ y $n + 1 = \frac{9}{5}$:

$$\int -x^{\frac{4}{5}} dx = -\frac{x^{\frac{9}{5}}}{\frac{9}{5}} + C = -\frac{5}{9}x^{\frac{9}{5}} + C$$

El coeficiente correcto es $-\frac{5}{9}$, que no coincide ni con -5 (opción a) ni con 5 (opción b). La respuesta es c).

La trampa: las opciones a) y b) están construidas para quien *multiplica* por 5 en vez de dividir entre $\frac{9}{5}$ (es decir, quien olvida el denominador $n + 1$).

9. De un experimento se sabe que $p(A) = 0,25$, $p(B) = 0,6$ y $p(A|B) = 0,15$. La probabilidad de $A \cap B$ es de:

a) $0,09$

b) $0,45$

c) $0,76$

Solución.

Respuesta: a)

Partimos de la definición de probabilidad condicionada y despejamos la intersección:

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} \implies p(A \cap B) = p(A|B) \cdot p(B) = 0,15 \cdot 0,6 = \boxed{0,09}$$

Observa que el dato $p(A) = 0,25$ **no se usa** en este apartado: está puesto como distractor (y para que compruebes que A y B *no* son independientes, ya que $p(A|B) = 0,15 \neq 0,25 = p(A)$).

10. Si la variable aleatoria X sigue una distribución, $N(4;9)$, siempre se puede afirmar que:

a) $Z = \dfrac{X-4}{9}$ *sigue una distribución* $N(0,1)$

b) $Z = \dfrac{X+4}{9}$ *sigue una distribución* $N(0,1)$

c) $Z = \dfrac{X-9}{4}$ *sigue una distribución* $N(0,1)$

Solución.

Respuesta: a)

En la notación habitual de bachillerato, $N(\mu;\sigma)$ indica **media** y **desviación típica**. Aquí: $\mu = 4$ y $\sigma = 9$.

La tipificación consiste en restar la media y dividir entre la desviación típica:

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-4}{9} \sim N(0,1)$$

Descartes: b) suma la media en lugar de restarla; c) intercambia media y desviación típica.

11. Si el error máximo admisible, E, para una muestra de tamaño n viene dado por

$$E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

a) Cuanto mayor es $(1-\alpha)$ mayor es el error E

b) Cuanto menor es $(1-\alpha)$ mayor es el error E

c) Cuanto mayor es $(1-\alpha)$ menor es el error E

Solución.

Respuesta: a)

Seguimos la cadena de dependencias:

$$(1-\alpha)\uparrow \Longrightarrow \alpha\downarrow \Longrightarrow \frac{\alpha}{2}\downarrow \Longrightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}}\uparrow \Longrightarrow E\uparrow$$

Es decir: a mayor nivel de confianza, mayor es el valor crítico $Z_{\alpha/2}$ y, como σ y N no cambian, mayor es el error. Esto descarta c) (que afirma lo contrario) y b) (que también afirma lo contrario, con el enunciado invertido).

Comprobación numérica: $Z_{\alpha/2} = 1,96$ para el 95% frente a $Z_{\alpha/2} = 2,575$ para el 99%. Más confianza $\Rightarrow$ intervalo más ancho.

Idea que se pregunta de fondo: no se puede tener a la vez mucha confianza y mucha precisión con la misma muestra. Para ganar confianza sin perder precisión hay que aumentar N.

12. El intervalo de confianza para el parámetro μ de una población $N(\mu,\sigma)$ al nivel de confianza $1-\alpha$ viene dado por:

a) $IC = \left(\bar{x} \pm Z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \right)$

b) $IC = \left(\bar{x} \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \right)$

c) $IC = \left(\bar{x} \pm Z_{\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \right)$

Solución.

Respuesta: b)

El intervalo de confianza para la media poblacional con σ conocida es:

$$IC = \left(\bar{x} \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \right)$$

El subíndice es $\frac{\alpha}{2}$ porque el intervalo es **bilateral**: el riesgo α se reparte a partes iguales entre las dos colas de la distribución, quedando $\frac{\alpha}{2}$ en cada una. Las opciones a) y c) usan valores críticos de un contraste unilateral.

Es la pregunta teórica hermana de la 11: ambas evalúan si se entiende el papel de $Z_{\alpha/2}$.

PARTE 2. – PROBLEMAS

Realice 2 de los 3 ejercicios propuestos

1. Dadas las siguientes matrices

$$A = 3\left[\begin{pmatrix}1 & 3\\ 6 & 3\end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix}1 & 3\\ 3 & 1\end{pmatrix}\right] \qquad \text{y} \qquad B = 3\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 4\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

a) Calcular la matriz A

b) Calcular la matriz B

c) Calcula la matriz X que verifica la ecuación $3X + A = B$

Solución.

a) Cálculo de A

Primero el producto por el escalar dentro del corchete, después la suma, y por último el producto por 3:

$$4\begin{pmatrix}1 & 3\\ 3 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4 & 12\\ 12 & 4\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 3\\ 6 & 3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4 & 12\\ 12 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5 & 15\\ 18 & 7\end{pmatrix}$$

$$A = 3\begin{pmatrix}5 & 15\\ 18 & 7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}15 & 45\\ 54 & 21\end{pmatrix}$$

b) Cálculo de B

Dimensiones: $(2 \times 3) \cdot (3 \times 2) = 2 \times 2$. El producto es posible.

$$\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 4\\ 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8 & 19\\ 7 & 14\end{pmatrix}$$

Detalle de cada elemento:

$$\begin{aligned} b_{11} &= 2(2) + 3(1) + 1(1) = 4 + 3 + 1 = 8\\ b_{12} &= 2(3) + 3(4) + 1(1) = 6 + 12 + 1 = 19\\ b_{21} &= 1(2) + 2(1) + 3(1) = 2 + 2 + 3 = 7\\ b_{22} &= 1(3) + 2(4) + 3(1) = 3 + 8 + 3 = 14 \end{aligned}$$

$$B = 3\begin{pmatrix}8 & 19\\ 7 & 14\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}24 & 57\\ 21 & 42\end{pmatrix}$$

c) Cálculo de X

Despejamos X en la ecuación matricial. Como solo hay sumas y productos por escalares, se despeja igual que en una ecuación numérica (no hace falta la inversa):

$$3X + A = B \implies 3X = B - A \implies X = \frac{1}{3}(B - A)$$

$$B - A = \begin{pmatrix}24 & 57\\ 21 & 42\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}15 & 45\\ 54 & 21\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9 & 12\\ -33 & 21\end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 9 & 12 \\ -33 & 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -11 & 7 \end{pmatrix}$$

Comprobación: $3X + A = \begin{pmatrix} 9 & 12 \\ -33 & 21 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 15 & 45 \\ 54 & 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & 57 \\ 21 & 42 \end{pmatrix} = B.$ ✓

2. Dada la función $f(x)$ cuya segunda derivada es $f''(x) = -30x$, y cuya gráfica presenta un mínimo en el punto $(-2, -5)$:

a) Calcula la primera derivada de la función $f'(x)$

b) Halla la función $f(x)$

c) Halla el máximo de la función $f(x)$

Solución.

a) Cálculo de $f'(x)$

Integramos la segunda derivada:

$$f'(x) = \int -30x\,dx = -30 \cdot \frac{x^2}{2} + C_1 = -15x^2 + C_1$$

Para determinar C_1 usamos la condición de **mínimo en** $(-2, -5)$: en un extremo relativo la derivada se anula, luego $f'(-2) = 0$:

$$-15(-2)^2 + C_1 = 0 \implies -60 + C_1 = 0 \implies C_1 = 60$$

$$\boxed{f'(x) = -15x^2 + 60}$$

b) Cálculo de $f(x)$

Integramos de nuevo:

$$f(x) = \int (-15x^2 + 60)\,dx = -15 \cdot \frac{x^3}{3} + 60x + C_2 = -5x^3 + 60x + C_2$$

Ahora usamos la otra información del punto: la gráfica *pasa* por $(-2, -5)$, es decir, $f(-2) = -5$:

$$-5(-2)^3 + 60(-2) + C_2 = -5 \implies 40 - 120 + C_2 = -5 \implies C_2 = 75$$

$$\boxed{f(x) = -5x^3 + 60x + 75}$$

Idea clave del problema: el punto $(-2, -5)$ aporta **dos** condiciones distintas, una para cada constante de integración: la abscisa -2 anula la derivada (extremo) y la pareja completa fija la altura de la función.

c) Máximo de $f(x)$

Buscamos los puntos críticos:

$$f'(x) = -15x^2 + 60 = 0 \implies x^2 = 4 \implies x = \pm 2$$

Los clasificamos con la segunda derivada, $f''(x) = -30x$:

- $f''(-2) = 60 > 0 \Rightarrow$ **mínimo** en $x = -2$ (coherente con el enunciado ✓).
- $f''(2) = -60 < 0 \Rightarrow$ **máximo** en $x = 2$.

Calculamos la ordenada:

$$f(2) = -5(2)^3 + 60(2) + 75 = -40 + 120 + 75 = 155$$

La función presenta un máximo en el punto $(2, 155)$**.**

El hecho de que el mínimo salga exactamente en $x = -2$ confirma que los apartados anteriores están bien resueltos: conviene señalarlo en el examen.

3. En una empresa de productos cosméticos, se toma una muestra de 9 botes de crema hidratante obteniendo los siguientes pesos en gramos

$$88, \quad 90, \quad 90, \quad 86, \quad 87, \quad 88, \quad 91, \quad 92, \quad 89$$

Se sabe que la distribución del peso de los botes de crema siguen una distribución normal con una desviación típica de 1,8 g.

a) Determina la distribución que seguirá los pesos medios de los botes de crema

b) Identifica los distintos parámetros que intervienen en la construcción del intervalo de confianza explicando su significado y el valor que toman.

c) Halla un intervalo de confianza al 95% para la media poblacional

Solución.

a) Distribución de las medias muestrales

La población sigue una $N(\mu;\sigma)$ con $\sigma = 1,8$ g. Por el **Teorema Central del Límite**, si la población es normal, las medias muestrales de tamaño n siguen también una distribución normal, con la misma media y desviación típica dividida entre $\sqrt{n}$:

$$\bar{X} \sim N\left(\mu\,;\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(\mu\,;\,\frac{1,8}{\sqrt{9}}\right) = N(\mu\,;\,0,6)$$

Es decir, los pesos medios se distribuyen según una normal de desviación típica **0,6 g** (el error típico de la media), tres veces más concentrada que la población original.

b) Parámetros del intervalo de confianza

- $\bar{x}$ = **media muestral**, el estimador puntual de μ y centro del intervalo:

$$\bar{x} = \frac{88 + 90 + 90 + 86 + 87 + 88 + 91 + 92 + 89}{9} = \frac{801}{9} = 89 \text{ g}$$

- σ = **desviación típica poblacional**, conocida por el enunciado: $\sigma = 1,8$ g. Mide la dispersión del peso de los botes.
- n = **tamaño de la muestra**: $n = 9$ botes. Cuanto mayor sea, más estrecho será el intervalo.
- $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ = **error típico de la media**: $\dfrac{1,8}{3} = 0,6$ g.
- $1 - \alpha$ = **nivel de confianza**: $0,95$, luego $\alpha = 0,05$ y $\dfrac{\alpha}{2} = 0,025$.
- $Z_{\alpha/2}$ = **valor crítico** de la $N(0,1)$ que deja $0,025$ de probabilidad en la cola derecha: $Z_{0,025} =$ **1,96**.
- E = **error máximo admisible** o semiamplitud del intervalo:

$$E = Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96 \cdot 0,6 = 1,176 \text{ g}$$

c) Intervalo de confianza al 95 %

$$IC = \left(\bar{x} \pm Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(89 \pm 1,96 \cdot \frac{1,8}{\sqrt{9}}\right) = (89 \pm 1,176)$$

$$\boxed{IC_{95\%} = (87,824\ ;\ 90,176)}$$

Interpretación (imprescindible para la máxima puntuación): con un nivel de confianza del 95 %, el peso medio real de todos los botes de crema hidratante de la empresa está comprendido entre **87,824 g y 90,176 g**. Dicho con precisión: si repitiéramos el muestreo muchas veces y construyéramos el intervalo de la misma forma, el 95 % de esos intervalos contendrían la verdadera media poblacional μ.

SOLUCIONARIO RÁPIDO – PARTE TEST

Pregunta	Respuesta	Clave
1	c)	Escalar = diagonal con todos los elementos *iguales*
2	a)	$3(A+B) = \begin{pmatrix} 6 & -12 \\ -9 & 18 \end{pmatrix}$ y después **trasponer**
3	b)	La solución es $x \geq 1$: ni -1 ni 0 la cumplen
4	b)	$(0,1)$ está sobre la frontera y la desigualdad es $\geq$
5	a)	Límites laterales $\pm\infty$: asíntota vertical
6	a)	$x^3 + 27 > 0 \Rightarrow x > -3$ (estricto: está en el denominador)
7	a)	$f'(x) = \frac{8x(x-4)}{(x-2)^2}$: mínimo en $x = 4$, máximo en $x = 0$
8	c)	$\sqrt[5]{x^4} = x^{4/5}$: queda $-\frac{5}{9}x^{9/5} + C$
9	a)	$p(A \cap B) = p(A\|B) \cdot p(B) = 0,15 \cdot 0,6$
10	a)	Tipificar: $Z = (X - \mu)/\sigma$
11	a)	$(1-\alpha) \uparrow \Rightarrow Z_{\alpha/2} \uparrow \Rightarrow E \uparrow$
12	b)	Intervalo bilateral: el subíndice es $\alpha/2$

Comparación con la convocatoria de 2024. El esqueleto del examen se repite: operaciones con matrices, inecuaciones, dominio de una función con raíz, extremos de una función racional del tipo $\frac{ax^2}{x-b}$, una integral que se simplifica antes de integrar, probabilidad condicionada y estimación por intervalos. La diferencia principal es que **2023 carga mucho más en inferencia estadística**: tres preguntas del test (10, 11 y 12) más el problema 3 de desarrollo giran alrededor del intervalo de confianza y el error.

El patrón de las trampas también se repite. Las opciones incorrectas no son aleatorias: reproducen el error típico. En la 2, no trasponer; en la 7, confundir máximo y mínimo; en la 8, multiplicar por 5 en lugar de dividir entre $\frac{9}{5}$; en la 10, sumar la media en vez de restarla. Cuando dos opciones se diferencian solo en un signo o en el orden de dos elementos, esa diferencia *es* la pregunta.